APMCM亚太地区大学生数学建模竞赛（中文赛项）

参赛手册

扫一扫进入大赛官网

APMCM

APMCM 亚太地区大学生数学建模竞赛

参 赛 手 册

亚 太 赛 组 委 会 制 作

目　录

竞赛报名通知.....1

竞赛集体报名高校须知.....2

竞赛邀请函.....4

历年赛题.....6

2024 年 A 题.....7

2024 年 B 题.....10

2024 年 C 题.....12

优秀论文.....16

2024 年 A 题.....17

2024 年 A 题.....36

2024 年 B 题.....53

2024 年 B 题.....75

2024 年 C 题.....96

2024 年 C 题.....119

亚太地区大学生数学建模竞赛组委会

2025年APMCM亚太地区大学生数学建模竞赛(中文赛项）报名通知

亚太赛[2025]03 号

各高等院校：

2025年第十五届亚太地区大学生数学建模竞赛（以下简称“竞赛”）是由中国国际科技促进会物联网工作委员会、北京图象图形学学会主办的亚太地区大学生学科类竞赛，竞赛由亚太地区大学生数学建模竞赛组委会负责组织，欢迎各高等院校按照竞赛章程及有关规定组织同学报名参赛。

1. 竞赛的时间确定为 2025年7月11日18:00 至2025年7月14日20:00。

2. 本次竞赛时间为4天，参赛对象为普通高校全日制在校大学生，参赛队由1-3名大学生组成。报名截止日期为7月11日12：00，报名截止后不能再更改报名信息。

3. 竞赛允许跨校组队，必须完整填写每位参赛者以及指导教师所在的学校全称。

4. 竞赛分为研究生组、本科组、专科组；报名时请根据参赛队员中最高在读学历选择组别。

5. 每所院校参赛队数不作统一规定；组委会将根据报名情况确定获一、二、三等奖的数量（大约分别占成功参赛总队数的 5%、15%、25%），优秀参赛者将享受组委会提供的其它奖励政策，请参见《亚太地区大学生数学建模竞赛奖励细则》。

6. 竞赛题目共2道（A、B题），一般来源于人工智能、工程与管理、互联网、图象图形等领域经过适当简化加工的实际问题。

7. 竞赛只需要提交电子版论文，不需要邮寄纸质版论文；所有参赛队必须提交中文版论文。

8. 优秀参赛者邀请参加图像图形技术与应用学术会议（IGTA），会议上将对获奖代表进行颁奖。

9. 组织集体报名的院校，该校负责人将所有参赛队的集体报名表发到竞赛组委会邮箱（apmcm@mathor.com），详情见《2025年亚太赛集体报名高校须知》。

10. 竞赛不邮寄书面题目，竞赛开始时赛题将在竞赛官网（www.apmcm.org）、北京图象图形学学会官网（www.bsig.org.cn）以及报名主页（www.saikr.com/apmcm/202502）上公布。

11. 其它事项请登录竞赛官网（www.apmcm.org），查看竞赛组委会的有关通知文件。

中国国际科技促进会
物联网工作委员会

北京图象图形学学会

亚太地区大学生
数学建模竞赛组委会

2025年5月

亚太地区大学生数学建模竞赛组委会

2025年APMCM亚太地区大学生数学建模竞赛(中文赛项）集体报名高校须知

亚太赛[2025]04 号

各高等院校：

2025年第十五届亚太地区大学生数学建模竞赛（以下简称“竞赛”）是由中国国际科技促进会物联网工作委员会、北京图象图形学学会主办的亚太地区大学生学科类竞赛，竞赛由亚太地区大学生数学建模竞赛组委会负责组织，欢迎各高等院校按照竞赛章程及有关规定组织同学报名参赛。

1、集体报名的高校负责人须通知本校参赛队伍在报名官网（https://www.saikr.com/vse/apmcm/202502）完成注册（注意：每支参赛队需在竞赛报名截止前在官网完整填写所有成员信息），不需要在线缴费，生成队伍的参赛编号后填写集体报名表格，同集体报名支付截图一同发至组委会邮箱（apmcm@mathor.com）。

2、组委会工作人员接收集体报名表格以后会在官网审核通过集体报名的队伍编号，操作完成后会发邮件给负责人核对。

3、集体报名缴费方式

本次竞赛集体注册费由培优卓越（天津）传媒科技有限公司收取并开具发票，参赛高校需为每个参赛队提交100元注册费。

银行户名：培优卓越（天津）传媒科技有限公司

开 户 行：招商银行股份有限公司天津高新区支行

账　　号：122918641410000

注：支付时请备注“**学校+队数+支付者姓名**”，集体转账后请负责人保留转账成功截图，并同集体报名表一同发至组委会邮箱（**apmcm@mathor.com**），如果需要开发票，请把发票抬头、纳税人识别号、是否开成一张发票等信息一起发送到组委会邮箱。

4、 论文提交方式（详情可参见《2025年亚太赛参赛规则》）

（1）**打印承诺书并签字**，通过拍照或扫描的方式生成 PDF 文件或 JPG 图片。

（2）**提交支撑材料**，将与竞赛相关的其他所有文件（包括程序、数据（赛题中的原始数据 除外）和结果等）压缩打包上传。“支撑材料”由参赛队员在审慎考虑的基础上，选择性地添加， 如竞赛题目中没有明确的要求，则不作为必须提交的材料（如果有自己编写的程序，虽然按照论文格式要求，程序必须放入正文附录，但源程序仍然要以支撑材料的形式提供）。

（3）**论文命名为**：题号+参赛控制编号（文件类型为 PDF）；

（4）**承诺书命名**：题号+参赛控制编号+cns（文件类型为 PDF 或 JPG）。

（5）**支撑材料命名**：题号+参赛控制编号+fj（文件类型为 rar 或 zip）

例 0001 队选择的是 A 题，则论文命名应为：A240001，承诺书命名应为：A240001cns，支撑材料命名应为：A240001fj。

（6）**然后分别上传至报名官网的对应电子档提交处**。

5、 报名联系方式

APMCM 组委会秘书处：林老师

电话&微信：15600483352

邮箱：apmcm@mathor.com

亚太地区大学生数学建模竞赛组委会

2025年5月

亚太地区大学生数学建模竞赛组委会

2025年APMCM亚太地区大学生数学建模竞赛(中文赛项）邀请函

亚太赛[2025]05号

尊敬的领导、老师及同学们：您们好！

亚太地区大学生数学建模竞赛（APMCM）今年已是第十五届，本次竞赛中文赛项将于2025年7月11日截止报名，2025年7月11日至7月15日正式开赛，现诚挚邀请您和贵单位组织人员参赛。

2025年第十五届亚太地区大学生数学建模竞赛是由中国国际科技促进会物联网工作委员会、北京图象图形学学会主办的亚太地区大学生学科类竞赛，竞赛由亚太地区大学生数学建模竞赛组委会负责组织。本次竞赛面向亚太地区高校大学生，第十四届参加人数已经达到近3万人，参加高校数量980所，其中包括985高校39所（覆盖全部985高校），211高校114所。经过10 年多的发展，APMCM已成为亚太地区极具影响力的基础学科与应用科技的赛事。

本次竞赛时间为四天，参赛对象为普通高校全日制在校大学生，参赛队由1-3 名大学生组成（可配一名指导教师）。竞赛的试题及试题材料均为中文，要求学生答题也为中文书写。优秀参赛者邀请参加图像图形技术与应用学术会议（IGTA）并将对获奖代表进行表彰颁奖。

欢迎广大高校在校生积极参加赛事活动，并预祝取得好成绩！

【赛程安排】

报名阶段：2025年5月2日至2025年7月11日

竞赛阶段：2025年7月11日18:00至2025年7月15日20:00

公布结果阶段：2024年8月31日之前

【奖项设置】

本次竞赛设置等级奖和优秀组织奖、优秀指导教师奖。等级奖设置比例如下。

“亚太杯”创新奖：6支（每题2支），奖金1000元/队+“创新奖”奖杯

一等奖：5% ，证书；

二等奖：15% ，证书；

三等奖：25% ，证书；

成功参赛奖。

【竞赛联系方式】

联系电话&微信：15600483352（林老师）

竞赛邮箱：apmcm@mathor.com

竞赛官网：https://new.saikr.com/vse/apmcm/202502

参赛学生、指导老师以及学校领队可以在竞赛官网上自行报名组队，竞赛章程和竞赛文件见竞赛官网，竞赛的最新消息均以该网站公布的为准。

亚太地区大学生数学建模竞赛组委会

2025年6月

历 年 赛 题

亚太赛组委会制作

2024 年第十四届 APMCM 亚太地区大学生数学建模竞赛

A题 飞行器外形的优化问题

飞行器是在大气层内或大气层外空间飞行的器械。飞行器可以分为：航空器、航天器、火箭和导弹。在大气层内飞行的称为航空器，如气球、飞艇、飞机等。它们靠空气的静浮力或空气相对运动产生的空气动力升空飞行。在太空飞行的称为航天器，如人造地球卫星、载人飞船、空间探测器、航天飞机等。它们在运载火箭的推动下获得必要的速度进入太空，然后依靠惯性做与天体类似的轨道运动。

目前人类历史上最快的飞行器是 1970 年代中期发射的太阳神（Helios）I 和 II 探测器，创下速度记录为每小时 252792 公里，等于每秒 70.22 公里。如果要走 20 光年的距离，需要 85714 年。如何优化飞行器的外形，使得其所受阻力最小，是航空航天领域里面非常重要的基础科学问题。

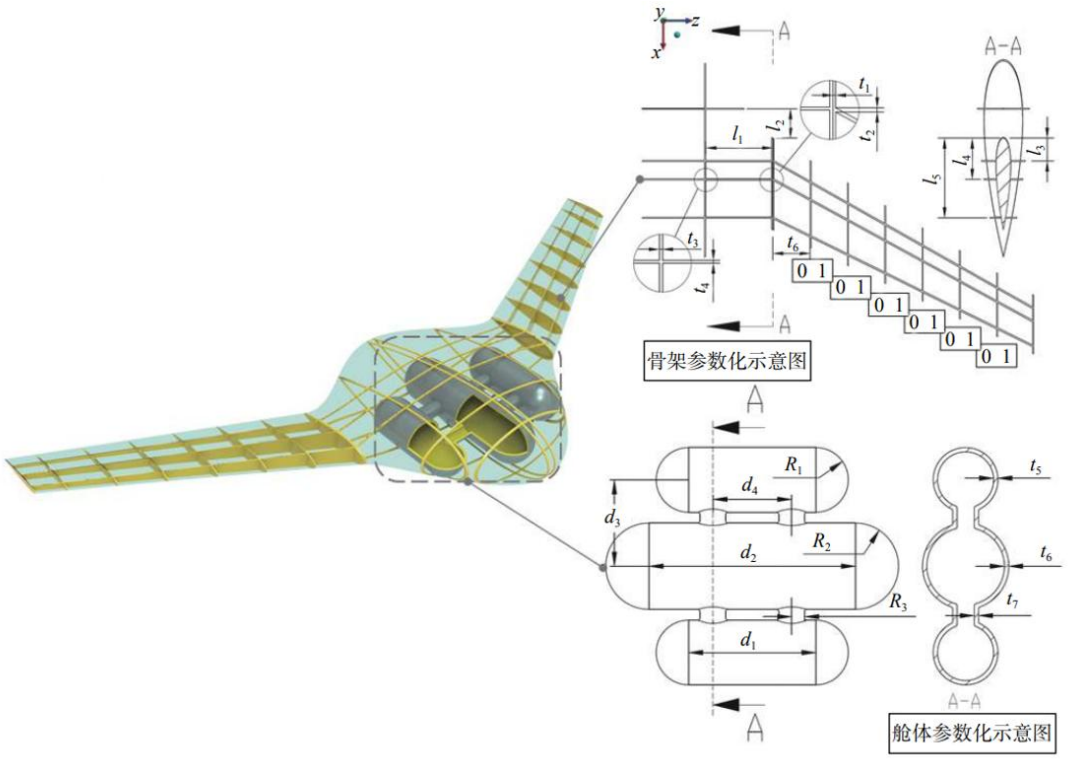


图 1. 某飞行器的结构示意图

图 1 是某飞行器的结构示意图，基于以上背景，请你们的团队通过数学建模的方法，研究如何优化飞行器的外形，解决以下问题：

问题 1 图 2 是某飞行器的部分尺寸示意图，请估计此飞行器的表面积和体积。

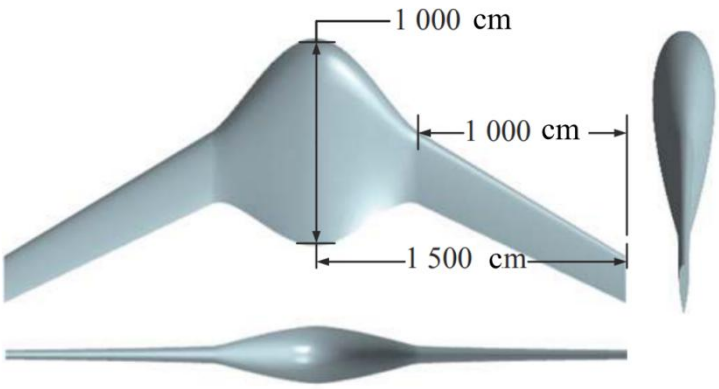


图 2. 某飞行器的部分尺寸示意图

问题 2 图 3 是某飞行器舱体结构的示意图，已知 $R_1 = 100$ cm, $R_2 = 90$ cm, $R_3 = 24$ cm, 请根据图中的比例尺，估算该飞行器舱体结构的表面积和体积。

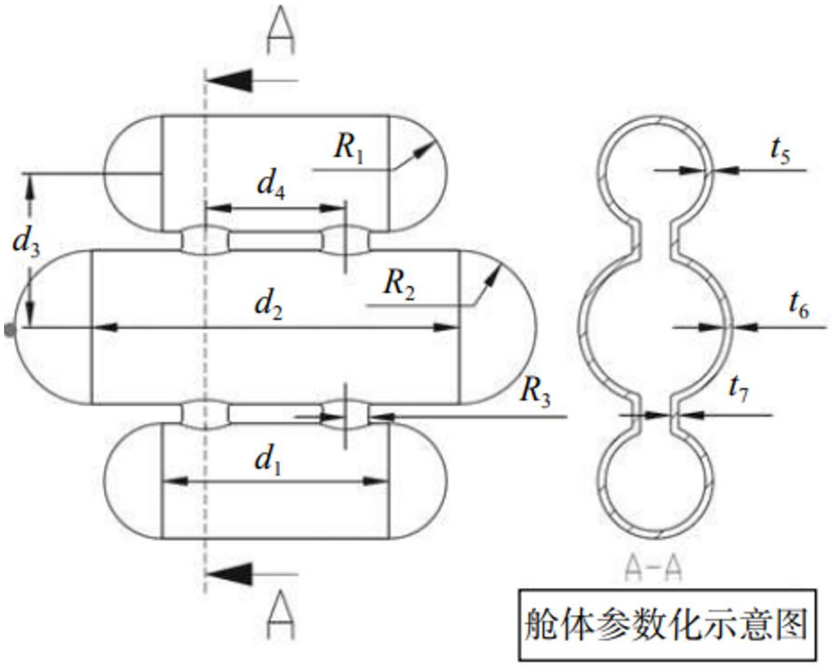


图 3. 某飞行器舱体结构的示意图

问题 3 表 1 是某飞行器结构参数的取值范围，请参照图 1，除表中参数外，耦合结构其他的参数设置如下：l_6 固定为 143 cm，固定机翼半展长为 1 000 cm（翼肋平均分布后共计 8 个，使其中间的 6 个翼肋为 0-1 离散变量，其中 1 表示此处布置有翼肋，0 表示未布置翼肋）。C_{l6} 示机翼 6 个位置处是否布置翼肋

的逻辑值 ，i=1,...,6），机身半展长固定为 500 cm，l_2 取固定值 120 cm, d_1 取固定值 250 cm，d_2 取固定值 350 cm，d_4 取固定值 150 cm。请设计出飞行器的最佳外形，使得所受阻力最小，并给出表 1 中某飞行器结构参数的最优值。

表 1. 某飞行器结构参数的取值范围

设计变量类型	参数	设计下限	设计上限
	$C_{l_6}^i$	0	1
	l_1	270 cm	290 cm
骨架结构设计变量	l_3	0.1	0.35
	l_4	0.45	0.55
	l_5	0.65	0.9
	R_1	65 cm	90 cm
	R_2	75 cm	100 cm
	R_3	20 cm	30 cm
舱体结构设计变量	t_5	8 cm	15 cm
	t_6	8 cm	15 cm
	t_7	8 cm	15 cm
	G_C	350 cm	450 cm

问题 4 图 4 是四种不同圆锥曲线的示意图，包括：圆形、椭圆、抛物线和双曲线。请分别考虑这四种圆锥曲线作为图 1 中飞行器的外形，重新求解问题 3 中飞行器的最佳外形问题，并给出飞行器对应的结构参数。

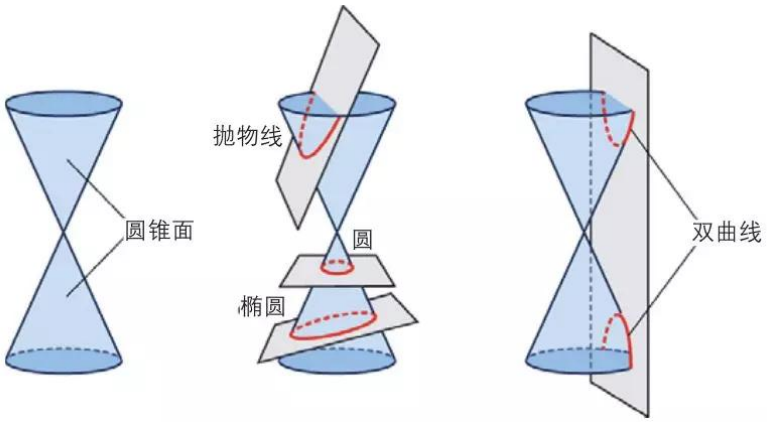


图 4. 四种不同圆锥曲线的示意图

2024 年第十四届 APMCM 亚太地区大学生数学建模竞赛

B题 洪水灾害的数据分析与预测

洪水是暴雨、急剧融冰化雪、风暴潮等自然因素引起的江河湖泊水量迅速增加，或者水位迅猛上涨的一种自然现象，是自然灾害。洪水又称大水，是河流、海洋、湖泊等水体上涨超过一定水位，威胁有关地区的安全，甚至造成灾害的水流。洪水一词，在中国出自先秦《尚书·尧典》。从那时起，四千多年中有过很多次水灾记载，欧洲最早的洪水记载也远在公元前 1450 年。在西亚的底格里斯—幼发拉底河以及非洲的尼罗河关于洪水的记载，则可追溯到公元前 40 世纪。2023 年 6 月 24 日 8 时至 25 日 8 时，中国 15 条河流发生超警洪水。2023 年，全球洪水等造成了数十亿美元的经济损失。

洪水的频率和严重程度与人口增长趋势相当一致。迅猛的人口增长，扩大耕地，围湖造田，乱砍滥伐等人为破坏不断地改变着地表状态，改变了汇流条件，加剧了洪灾程度。在降水多的年份，洪水是否造成灾害，以及洪水灾害的大小，也离不开人为因素，长期以来人为的森林破坏是其重要原因。长江上游乱砍滥伐的恶果是惊人的水土流失。现已达 35 万平方千米，每年土壤浸融量达 25 亿吨。河流、湖泊、水库淤积的泥沙量达 20 亿吨。仅四川一省一年流入长江各支流的泥沙，如叠成宽高各 1 米的堤，可以围绕地球赤道 16 圈。我国第一大淡水湖洞庭湖每年沉积的泥沙达 1 亿多吨，有专家惊呼：“这样下去，要不了 50 年，洞庭湖将从地球上消失！”长江之险，险在荆江，由于泥沙俱下，如今荆江段河床比江外地面高出十多米，成了除黄河之外名副其实的地上河。对森林的肆意砍伐不仅危害自己，而且祸及子孙后代，世界上许多地方，如美索不达米亚、小亚细亚、阿尔卑斯山南坡等由于过度砍伐森林，最后都变成了不毛之地。

附件 train.csv 中提供了超过 100 万的洪水数据，其中包含洪水事件的 id、季风强度、地形排水、河流管理、森林砍伐、城市化、气候变化、大坝质量、淤积、农业实践、侵蚀、无效防灾、排水系统、海岸脆弱性、滑坡、流域、基础设施恶化、人口得分、湿地损失、规划不足、政策因素和发生洪水的概率。

附件 test.csv 中包含了超过 70 万的洪水数据，其中包含洪水事件的 id 和上述 20 个指标得分，缺少发生洪水的概率。附件 submit.csv 中包含 test.csv 中的洪

水事件的 id，缺少发生洪水的概率。

请你们的团队通过数学建模和数据分析的方法，预测发生洪水灾害的概率，解决以下问题：

问题 1. 请分析附件 train.csv 中的数据，分析并可视化上述 20 个指标中，哪些指标与洪水的发生有着密切的关联？哪些指标与洪水发生的相关性不大？并分析可能的原因，然后针对洪水的提前预防，提出你们合理的建议和措施。

问题 2. 将附件 train.csv 中洪水发生的概率聚类成不同类别，分析具有高、中、低风险的洪水事件的指标特征。然后，选取合适的指标，计算不同指标的权重，建立发生洪水不同风险的预警评价模型，最后进行模型的灵敏度分析。

问题 3. 基于问题 1 中指标分析的结果，请建立洪水发生概率的预测模型，从 20 个指标中选取合适指标，预测洪水发生的概率，并验证你们预测模型的准确性。如果仅用 5 个关键指标，如何调整改进你们的洪水发生概率的预测模型？

问题 4. 基于问题 2 中建立的洪水发生概率的预测模型，预测附件 test.csv 中所有事件发生洪水的概率，并将预测结果填入附件 submit.csv 中。然后绘制这 74 多万件发生洪水的概率的直方图和折线图，分析此结果的分布是否服从正态分布。

附件：

1. train.csv
2. test.csv
3. submit.csv

2024年第十四届APMCM亚太地区大学生数学建模竞赛

C题 基于量子计算的物流配送问题

随着电子商务的迅猛发展，电商平台对物流配送的需求日益增长。为了确保货物能够按时、高效地送达消费者手中，电商平台与第三方物流公司建立了紧密的合作关系。然而，面对大量的货物和多样的目的地，如何制定合理的运输策略成为了物流公司面临的一大挑战。

传统的物流优化方法在应对复杂的运输需求时往往具有较高的复杂度。为了解决这个问题，物流公司希望借助量子计算技术来自动计算运输综合策略，从而可以更合理地规划运输路线、选择合适的运输方式和工具，并确保在规定的时间内将货物送达目的地。这样不仅能够提高物流效率，降低运输成本，还能够提升消费者对电商平台的满意度。

量子计算，尤其是相干伊辛机(Coherent Ising Machine, CIM)，在处理复杂优化问题方面展现出了巨大的潜力。由于其和相干伊辛机的紧密联系，QUBO（Quadratic Unconstrained Binary Optimization）模型构成了量子计算中的一类核心问题。QUBO模型是一种适配相干伊辛机（CIM）的模型，其形式为

$$\min x^T Q x,\ x \in \{0,1\}^n$$

其中Q为$n*n$的系数矩阵。本赛题主要基于物流配送的场景，通过将问题建模为QUBO形式，使用Kaiwu SDK完成对问题的求解。Kaiwu SDK是一套基于相干伊辛机求解QUBO模型的软件开发套件，可以通过访问下述链接(https://developer.qboson.com)来获取Kaiwu SDK。

一、货物当前所在城市

公司一：

城市	数量（吨）
上海	19
西安	20
郑州	12

公司二：

城市	数量（吨）
上海	14
西安	24
郑州	18

二、货物需要运往的城市

小组一：

货物类型	货物数量(吨)	终点城市
普货	19	昆明
普货	25	深圳
普货	7	天津

小组二：

货物类型	货物数量(吨)	终点城市
普货	27	昆明
普货	10	**深圳**
普货	19	天津

三、卡车

市场上有12吨载重卡车和5吨载重卡车两种卡车供租赁，租金分别为每天5000元和每天3000元。这些卡车可以在任何地方租赁，并且客户可以根据自己的需求选择合适的卡车类型和租赁时长。假设每个城市有足够数量的可供租赁的卡车。

四、卡车运输

为节约成本，各小组间可在任何一个城市拼货和中转运输。拼货是指将来自不同发货人的货物合并在一起，由同一辆车或同一批运输工具运送的方式。同时货物可以由一辆车辆全部或者部分卸货后，暂存在当前城市，待后续的车辆将其运走。通过拼货可以更加灵活地安排运输计划，提高运输效率，降低成本，优化运输路线和运输资源的利用。

卡车单趟时间 单位：天

	上海	西安	昆明	深圳	天津	郑州
上海	__	3	6	4	3	2
西安	3	__	4	4	2	1
昆明	6	4	__	2	6	5
深圳	4	4	2	__	5	4
天津	3	2	6	5	__	1
郑州	2	1	5	4	1	__

普通卡车 A(12 吨)单趟成本 单位：元

	上海	西安	昆明	深圳	天津	郑州
上海	__	13500	26500	16500	13500	8500
西安	13500	__	18500	20500	10500	3500
昆明	26500	18500	__	7500	31500	24500
深圳	16500	20500	7500	__	25500	17500
天津	13500	10500	31500	25500	__	5500
郑州	8500	3500	24500	17500	5500	__

普通卡车 B(5 吨)单趟成本 单位：元

	上海	西安	昆明	深圳	天津	郑州
上海	__	11000	24000	14000	11000	6000
西安	11000	__	16000	18000	8000	1000
昆明	24000	16000	__	5000	29000	22000
深圳	14000	18000	5000	__	23000	15000
天津	11000	8000	29000	23000	__	3000
郑州	6000	1000	22000	15000	3000	__

五、航空运输

除了陆路运输，货物也可以通过航空运输，题目中考虑的任意两个城市之间都可以通过航空运输进行货物运输。为简化计算，假设货物的国内航空运价无论远近均为 10000 元/吨，当日到达。

如果模型的比特数较高，可以尝试使用SubQUBO等方法进行求解（参考附件1）。提出创新性的算法和解决方案是一个加分项。附件2为供参考的QUBO建模教程。

问题一 假设这两个物流公司独立运营，拼货只发生在公司内部。你的任务是以最小化单个物流公司的运营成本为目标，建立QUBO模型，使用Kaiwu SDK中的CIM模拟器和模拟退火求解器分别求解，为两个物流公司分别设计货车租赁方案和货物运输方案。

问题二 当这两个物流公司之间合作运营时，公司之间可以拼货运输，此时的优化目标为最小化两个公司的总成本。请使用Kaiwu SDK中的CIM模拟器和模拟退火求解器求解，给出最优的货车租赁方案和货物运输方案，以及合作运营带来的总体成本减少量。

问题三 请你自行提出一个具有商业化前景或学术价值的场景。场景可以涉及AI，通信，金融，生物医学，物流供应链管理等相关领域。你需要给出相应的QUBO模型表达式，并计算模型所需的比特数量级(可以用相关参数表示)。附件中3-附件6为覆盖多个场景的参考论文。

优　秀　论　文

亚太赛组委会制作

选题	2024 年第十四届 APMCM 亚太地区大学生数学建模竞赛（中文赛项）	参赛编号
A		apmcm 24102838

飞行器的气动计算及布局优化设计

摘要

这是飞行器的一个优化模型，本文从表面积和体积出发，来寻找表面积与阻力的关系，并且将飞行器复杂机身用曲线方程表示，转化为数学问题，确定目标函数，给出约束条件。在此基础上用遗传算法寻优，比较四种圆锥曲线下的各个参数，确定最优外形。

针对问题一：飞行器本身是一个不规则体，本文将其分为机身和机翼两个部分。对于机身部分，假设它的外形曲线为**二次抛物线**，它的横截面为椭圆面；对于机翼部分，假设机翼的横切面为**二次抛物面**。对各部分分别求面积与体积，再求和得出飞行器的表面积为 $5021\boldsymbol{m^2}$，体积 $\boldsymbol{109.6m^3}$。

针对问题二：根据题中提供的参数构成比例尺，确定舱体各部分的几何参数。同样将舱体分解为几个简单圆柱体和半球体的叠加。为了便于计算，我们将两个柱体之间的接触体近似看作圆柱，接触体在柱体上的剖面近似看作圆。代入参数，即可计算出飞行器舱体的表面积为 $\boldsymbol{110.8m^2}$,体积为 $\boldsymbol{42.6m^3}$。

针对问题三：先查找飞行器飞行时的升、阻力方程，随后将机身和机翼的结构简化，以**舱体重心**为原点建立坐标系，从飞行器的表面积入手，得到迎风面积的计算公式并将其作为优化模型的目标函数。约束条件即舱体的三个半球和连接舱体的圆柱不能与机头的椭圆抛物面相交，同时结合给出的飞行器各个参数的设计上、下限，建立完整的**非线性优化模型**，并采用**信赖域优化算法**对模型进行求解，得到当空气密度为 1.225m^3，飞行速度为 100m/s，阻力系数为 1.5 时，飞行器所受到的阻力约为 **86.3KN**。之后构建**召回函数**来可视化目标函数随迭代次数的变化，目标函数值稳定，确定找到了最优解。**对于机翼**，结合胜利计算公式提出机翼翼肋的**平均受力公式**，将翼肋的平均受力与翼肋总数相乘作为目标函数，转化为**单目标优化问题**。机翼结构优化模型是一个 **0-1 混合整数规划模型**，可求解得到最小平均载荷约为 **0.2652MPa**，以此得到最优外形，具体结构参数见**表 5** 和**表 6**。

针对问题四：通过平面斜切圆锥，可以生成圆、椭圆、抛物线和双曲线等典型的飞行器截面形状。结合**模线设计方法**和二次曲线形状控制参数，可以快速、简便且精确地构建各种**二次曲线**弹身形状。本文提出了一套预估横截面为二次曲线的飞行器纵向和横向气动力的工程计算方法，并基于此建立了二次曲线截面弹身飞行器的优化设计模型。利用该模型，对圆截面、椭圆截面、双曲线截面和抛物线截面外形进行比较。最后，通过比较二次曲线截面弹身外形飞行器的气动特性，确定了**双曲线**为最优外形。

关键词：0-1 混合整数规划 信赖域优化算法 模线设计方法 单目标优化 二次曲线

一、问题重述

1.1 问题背景

目前，优化设计技术在飞行器气动布局设计中发挥着重要作用，而构建合理的优化模型是获取理想气动外形的关键所在。合理筛选几何外形控制参数，并从众多布局参数中选取最关键、最少的、对设计目标敏感的变量进行优化设计，对于提升设计质量和效率至关重要。

1.2 问题要求

基于飞行器的结构示意图，通过建模来优化飞行器外形，解决以下问题：

问题 1：根据飞行器的部分尺寸示意图，估计此飞行器的表面积和体积。

问题 2：已知飞行器舱体结构示意图，根据给出的数据和图中比例尺，估算飞行器舱体结构的表面积和体积。

问题 3：根据给出的飞行器结构参数的取值范围，设计出飞行器的最佳外形，并给出参数的最优值。

问题 4：分别以四种圆锥曲线作为飞行器的外形，重新求解飞行器的最佳外形，并给出结构参数。

二、问题分析

该问题旨在建立一个飞行器气动布局优化模型，求解出飞行器的最佳外形。

2.1 问题一分析

飞行器本身是一个不规则体，本文采用几何法求其表面积和体积，对于机身部分，假设其外形曲线为二次抛物线，横截面为椭圆面；对于机翼部分，假设其横切面为二次抛物面，分别计算出表面积和体积再求和。

2.2 问题二分析

根据提供的舱体结构示意图数据，可以通过图中某个值的大小与实际值构成比例尺，从而可以确定舱体各部分的几何参数。采用几何分解法，将复杂舱体结构分解成几个简单几何体的叠加，分别计算每个几何部分的表面积和体积再求和。

2.3 问题三分析

根据给出的飞行器结构参数的取值范围，我们分别对机身与机翼提出优化方案。保

证优化策略既能有效降低气动计算量，又能求解出飞行器的最佳外形，使得所受阻力最小，得到相对精确的优化解。

2.4 问题四分析

利用平面斜切圆锥获得的二次曲线构造圆、椭圆、抛物线及双曲线等典型的飞行器截面形状。我们提出并建立了二次曲线截面飞行器的优化设计模型，并利用相同的优化模型对圆截面、椭圆截面、双曲线截面及抛物线截面外形进行了优化，求解飞行器的最佳外形，并给出结构参数。

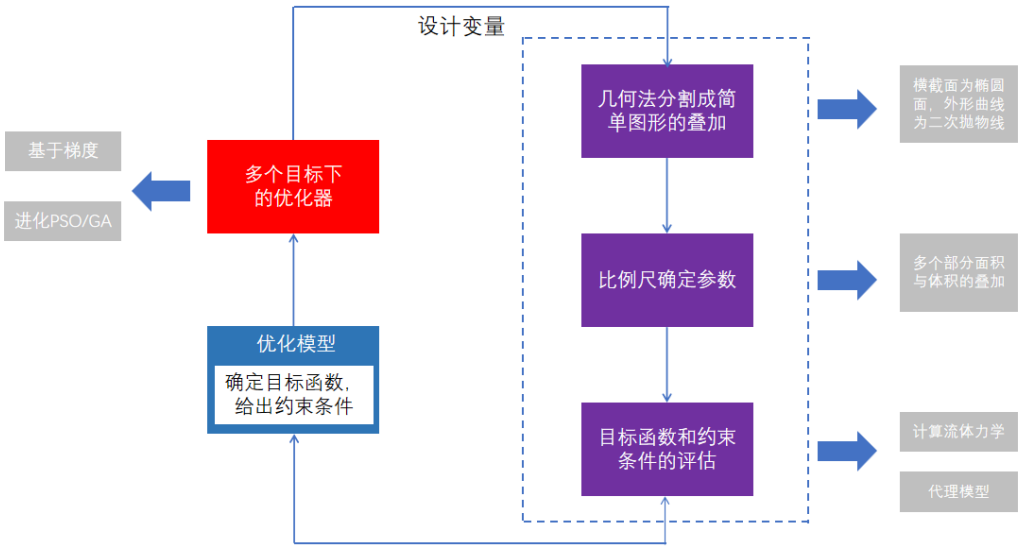


图 1 气动外形优化设计流程图

三、模型假设

- 假设一：机身是一个上下对称的几何体。
- 假设二：飞行器为蒙皮桁条结构，且蒙皮为刚体。
- 假设三：飞行器在晴朗无风的空域匀速飞行。
- 假设四：构建有限元模型时，忽略机身弹性的影响

四、符号说明

符号	符号说明
ρ	流体密度
C_F	阻力系数
A	流体面积
ω_i	权重因子

注：这里并未列出部分变量，这是由于它们在不同小节处有不同的含义，因此我们

会在每一节中详细讨论它们。

五、模型建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 机身部分的求解

飞行器是一个不规则体，为了求解它的表面积和体积，本文将飞行器分为机身和机翼两个部分。对于机身，我们假设飞行器机身的外形曲线为二次抛物线，它的横截面为椭圆面，设主体前部高为h_1,后部高为h_2，其中a为椭圆截面的长轴，b为椭圆截面短轴。

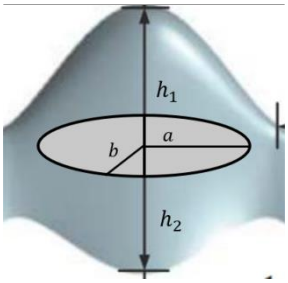


图 2 飞行器外形模拟图

根据模型假设，可求解飞行器机身各部分面积与体积。
飞行器机身前部表面积为：

$$S_1 = \int_0^{h_1} 2\pi b\sqrt{\frac{h_1 - y}{h_1}} - 4(a-b)\sqrt{1-\frac{y}{h_1}}dy = \frac{2}{3}h_1(2\pi b + 4a - 4b) \quad (1)$$

飞行器机身前部的体积为：

$$V_1 = \int_0^{h_1} \frac{\pi ab(h_1 - y)}{h_1}dy = \frac{ab\pi}{h_1}(\frac{{h_1}^2}{2}) \quad (2)$$

飞行器机身后部的表面积为：

$$S_2 = \int_0^{h_1} 2\pi b\sqrt{1-\frac{y}{h_1}} - 4(a-b)\sqrt{1-\frac{h_2}{h_1}}dy = \frac{2}{3}h_2(2\pi b + 4a - 4b) \quad (3)$$

飞行器机身后部的体积为：

$$V_2 = \int_0^{h_2} \frac{\pi ab(h_2 - y)}{h_2} dy = \frac{ab\pi}{h_2}(\frac{{h_2}^2}{2}) \quad (4)$$

5.1.2 机翼部分的求解

对于机翼部分，我们假设机翼的横切面为二次抛物面，设机翼前部高为 l_3 ，后部高为（l_5-l_3），宽度为e，机翼长度为L。

机翼横截面前部的弧长为：

$$L_1 = \int_{-e}^{e} \sqrt{1 + \frac{4{l_3}^2 x^2}{e^4}} dx \quad (5)$$

机翼横截面后部的弧长为：

$$L_2 = \int_{-e}^{e} \sqrt{1 + \frac{4(l_5 - l_3)^2 x^2}{e^4}} dx \quad (6)$$

机翼的表面积为：

$$S_3 = (L_1 + L_2)L \quad (7)$$

机翼前部截面积为：

$$C_1 = \int_{-e}^{e} -\frac{l_3 x^2}{e^2} + l_3 \, dx \quad (8)$$

机翼后部截面积为：

$$C_2 = \int_{-e}^{e} -\frac{(l_5 - l_3)x^2}{e^2} + l_5 - l_3 \, dx \quad (9)$$

机翼的体积为：

$$V_3 = (C_1 + C_2)L \quad (10)$$

5.1.3 模型的求解

飞行器的总表面积为：

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \quad (11)$$

飞行器的总体积为：

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 + V_3 \tag{12}$$

将参数代入，可计算得到飞行器的表面积为 $\mathbf{5021}\boldsymbol{m^2}$，体积为 $\mathbf{109.6}\boldsymbol{m^3}$。

5.2 问题二模型的建立与求解

根据题中提供的参数以及比例尺，能够确定舱体各部分的几何参数。本通过 image J 软件测得R_1在图中的大小，与实际值相对应构成比例尺，再根据这个比例尺得到各部分几何参数，如下表 1：

表 1 参数测量值

参数	测量值
R_1	90.0cm
R_2	100.0cm
R_3	24.0cm
d_1	355.8cm
d_2	572.3cm
d_3	241.9cm

舱体结构是一个复杂几何体，本文为简化计算，将其分解为几个圆柱体和半球体的叠加。

表面积公式如下：

$$\begin{cases} S_{柱} = 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ S_{球} = 4\pi r^2 \end{cases} \tag{13}$$

体积公式如下：

$$\begin{cases} V_{柱} = \pi r^2 h \\ V_{球} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \end{cases} \tag{14}$$

为了便于计算，我们将两个柱体之间的接触体近似看作圆柱，接触体在柱体上的剖面近似看作圆。

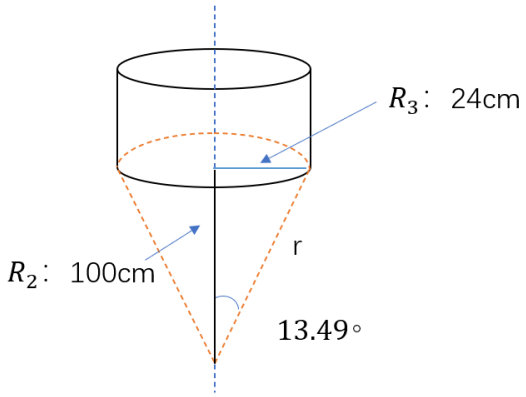


图 3 两个柱体接触简化模型

底边扇形的 1/2 原弧长为 $2\pi r * 26.8^{\circ}/360^{\circ} =$ 48.08cm，圆的直径 $2R_3 =$ 48cm，两者相差不大，可将接触面近似看作圆。

得到的整个几何体的表面积公式和体积公式为：

$$\begin{cases} S_{总} = 2 * （4\pi {R_1}^2 + 2\pi R_1 d_1） - 4\pi {R_3}^2 + 4 * 2\pi R_3 * (d_3 - R_1 - R_2) + 4\pi {R_2}^2 \\ \qquad +2\pi R_2 d_2 - 4\pi {R_3}^2 \\ V_{总} = 2 * \frac{4}{3}\pi {R_1}^3 + 2\pi {R_1}^2 d_1 + \pi {R_2}^2 d_2 + \frac{4}{3}\pi {R_2}^3 + 4\pi d_3 {R_3}^2 \\ \qquad -4\pi R_1 {R_3}^2 - 4\pi R_2 {R_3}^2 \end{cases} \tag{15}$$

将参数代入其中，可计算出飞行器舱体的表面积为 $\boldsymbol{110.8m^2}$,体积为 $\boldsymbol{42.6m^3}$。

5.3 问题三模型的建立与求解

飞行器在飞行时受到的阻力方程为：

$$F = \frac{1}{2}\rho v^2 * C_F * A \tag{16}$$

其中ρ为流体密度，v为飞行器相对流体的运动速度，C_F为阻力系数，是一个常数，A为飞行器的迎风面积。由问题假设(3)、(4) 可知，ρ，v均为常数，阻力系数C_f通常由飞行器表面的材料与外形决定，在题目中已经给出指定飞行器的情况下，结合问题假设 (2) 可知，C_f也为常数。因此，可以将问题(3)转化为使飞行器的迎风面积最小的优化问题。

针对机翼结构，通过查阅资料可知，飞行器的机翼在飞行过程中所受到的升力计算公式为：

$$f = \frac{1}{2}\rho v^2 C_l S \tag{17}$$

ρ为流体密度，v 为飞行器相对流体的运动速度，C_l为阻力系数，S 为飞行器的翼展面积。在使飞行器迎风面积最小的前提下，优化机翼结构，使翼肋在飞行过程中所受平

均载荷最小的同时，翼肋数量尽可能少。

5.3.1 飞行器结构的简化

•骨架结构的简化

由题中图 1 可知，l_2为机翼最内侧翼肋的顶端到舱体的小半球之间的水平距离。如图所示，不妨假设机头（机身的迎风部位，即飞行过程中比机翼内侧翼肋顶端更靠前的部位）的长度为 $3l_2$=360cm，且舱体的重心即为机头的底部中心。因此，舱体的重心与舱体的几何中心在同一水平线上，并且比舱体的几何中心更靠近机头 5cm，即 G_c=$3l_2$=360cm。

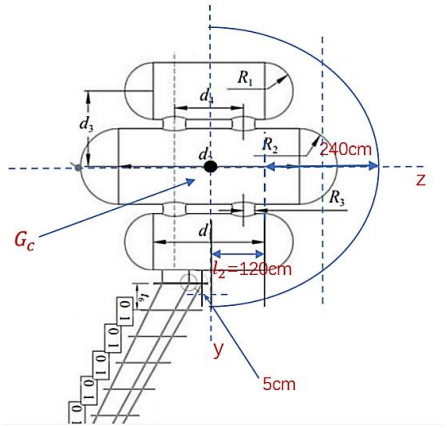


图 4 飞行器结构的简化

•机头形状的简化

为了使飞行器的阻力系数C_f尽可能小，同时简化计算，如图 x 所示，本文将机头的主视图看作一个抛物线，并以机头的底部中点作为原点，建立平面直角坐标系。则可以得到抛物线的解析式,其中，h 为机头的长度。

$$y = \frac{h}{25}(5 + x)(5 - x) \tag{18}$$

根据问题 1 的模型，可以将机头的底部看作一个椭圆，因此，机头的几何形状可以被大致等效为一个椭圆抛物面。将上述抛物线沿纵轴旋转，并通过坐标轴的伸缩变换可以得到机头在空间直角坐标系的解析式如下，b 为机头底部椭圆的短轴。

$$z = 3.6(1 - \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{b^2}) \tag{19}$$

机头在空间坐标系下的形状如图所示：

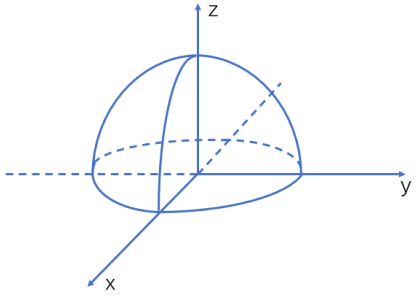


图 5 飞行器机头坐标系的建立

•机翼结构的简化

由题目中对飞行器机翼参数的设定，如图所示，本文对结构做出如下简化：

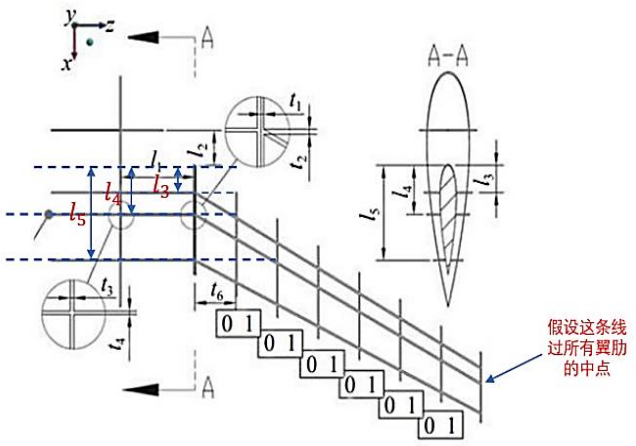


图 6 机翼部分结构的简化

其中l_3为翼肋前部超出机翼骨架部分的长度,l_4为翼肋一半的长度,l_5为翼肋的顶部到机翼第三根骨架的长度。同时我们假设：

（1）机翼的第二根骨架过所有翼肋的中点。

（2）最内侧翼肋的长度为最外侧翼肋长度的两倍。

（3）翼肋仅在机翼骨架的内部承受载荷。

（4）机翼的迎风面积为翼肋前部超出机翼骨架部分的面积。

5.3.2 机身外形-舱体结构优化模型

通过前文建立的飞行器表面积计算模型，本文提出了飞行器迎风面积的计算公式：

$$\iint_{D_{xy}} \sqrt{1+(\frac{36y}{125})^2+(\frac{36x}{5b})^2}\,dx\,dy+30(\pi c+2(l_3-c)) \tag{20}$$

其中：

$$D_{xy}:\begin{cases} z=0 \\ \dfrac{y^2}{25}+\dfrac{x^2}{b^2}\le 1 \end{cases} \tag{21}$$

c 为机翼的厚度，本文取 c=0.5 。

经过计算，飞行器迎风面积约等于 115b。因此得到目标函数：

$$\min 115b+30(0.5\pi+2(l_3-0.5)) \tag{22}$$

飞行器除了需要满足题目给出的设计变量，还需要能够容纳整个舱体。将这个约束条件进行简化，即为：舱体的三个半球和连接舱体的圆柱不能与机头的椭圆抛物面相交。将这些几何体放在椭圆抛物面的坐标系中，可以得出它们的曲面方程。这些几何体的曲面方程分别与椭圆抛物面的曲面方程组成的非线性方程组无实数解，即为该优化模型的约束条件。

对机舱小半球：

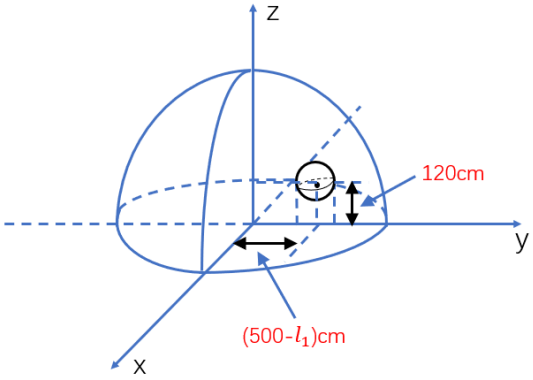


图 7 机舱小半球在坐标系下的分析

如图所示，由于两个小半球关于 zOx 面轴对称，且椭圆抛物面也关于 zOx 面轴对称，因此只需要保证一个其中小球方程与椭圆抛物面方程组成的方程组无实数解即可。

小球方程为：

$$x^2 + (y - 5 + l_1)^2 + (z - 1.2)^2 = (R_1 + t_5)^2 \tag{23}$$

即方程组：

$$\begin{cases} x^2 + (y - 5 + l_1)^2 + (z - 1.2)^2 = (R_1 + t_5)^2 \\ z = 3.6(1 - \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{b^2}) \end{cases} \tag{24}$$

无实数解。

对机舱大半球：

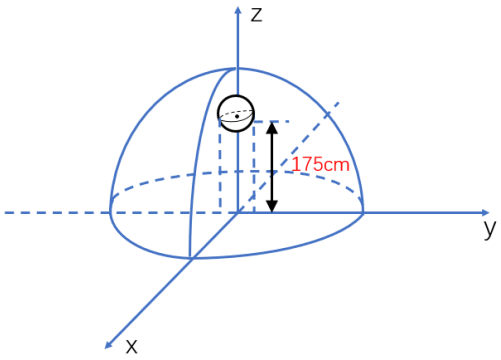


图 8 机舱大半球在坐标系下的分析

如图所示，大球方程为：

$$x^2 + y^2 + (z - 1.7)^2 = (R_2 + t_6)^2 \tag{25}$$

即方程组：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 1.7)^2 = (R_2 + t_6)^2 \\ z = 3.6(1 - \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{b^2}) \end{cases} \tag{26}$$

无实数解。

对连接舱体之间的圆柱：

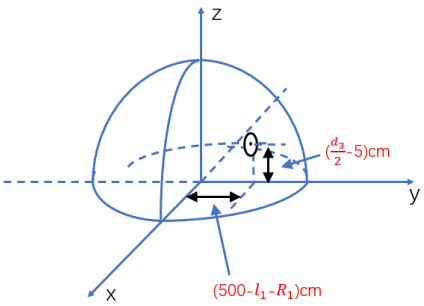


图 9 连接舱体部分在坐标系下的分析

由图可知，越靠近 z 轴，机头的内部空间越大，因此，只需要保证圆柱中最外侧的圆与椭圆抛物面无交点即可。根据对称性，秩序保证其中一个圆与椭圆抛物面无交点即可。

圆的曲面方程为：

$$\begin{cases} y = 5 - l_1 - R_1 \\ x^2 + (z - 0.7)^2 = (R_3 + t_7)^2 \end{cases} \tag{27}$$

因此方程组：

$$\begin{cases} y = 5 - l_1 - R_1 \\ x^2 + (z - 0.7)^2 = (R_3 + t_7)^2 \\ z = 3.6(1 - \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{b^2}) \end{cases} \tag{28}$$

无实数解。

结合题目中给出的飞行器各参数的设计上限与设计下限，本文建立了一个完整的优化模型。由于这是一个非线性规划模型，本文采用信赖域优化算法对模型进行求解。

信赖域优化(Trust-constr)算法是一种用于数值优化的算法，特别是用于求解带约束的优化问题。流程如下：

（1） **初始化：**

●设置初始参数和信赖域半径。

●确定初始的可行解（满足约束条件的解）。

（2）**迭代优化过程**

●求解子问题：

在当前信赖域内，通过解一个局部的数学规划问题（通常是二次规划或修正的二次规划），找到在当前信赖域内的最优解。

●更新信赖域：

根据求解出的最优解更新信赖域的大小和形状，以便在下一步继续优化。

（3）**终止条件：**

●在每次迭代中检查是否满足了终止优化的条件，例如目标函数的收敛或满足一定的数值容限。

●如果满足终止条件，则停止优化；否则，回到第二步继续迭代。

运用 python 中的 scipy 库实现优化模型，调用 minimize 函数进行求解，并设置算法为信赖域优化算法。求解得到飞行器的迎风面积约为 141 ㎡，将其带入阻力计算公式，当空气密度为 1.225m³，飞行速度为 100m/s，阻力系数为 1.5 时，飞行器所受到的阻

力约为 86.3KN。飞行器设计参数的最优值结果见表 5：

表 5 飞行器设计参数的最优值

参数	数值
l_3	0.109
R_1	0.776
R_2	0.875
R_3	0.250
t_5	0.115
t_6	0.115
t_7	0.115
l_1	2.800

构建召回函数，并调用 minimize 函数中的"callback"方法，将每次迭代过后的目标函数值记录在列表中，运用 matplotlib 库绘制目标函数随迭代次数的变化图见图 10：

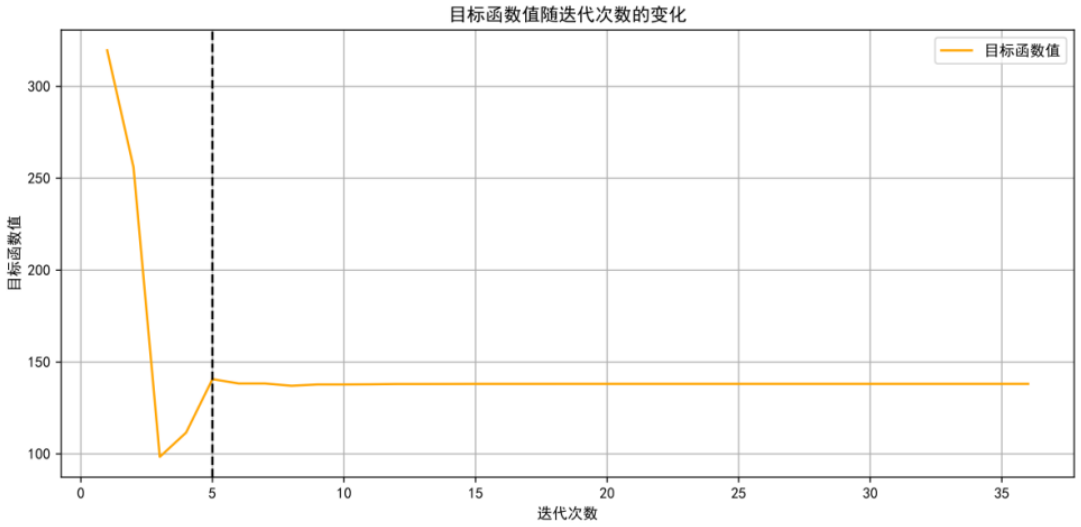


图 10 目标函数随迭代次数的变化

由图可知，在经过五次迭代后，目标函数值稳定在 140 左右，可以确定该算法找到了模型的局部最优解。

5.3.3 机翼结构优化模型

结合前文并依据“平行线分线段对应成比例”的几何原理，从机翼内侧到机翼外侧排布的 8 个翼肋的长度组成一个等比数列，设 q 为公比，则有：

$$q^7 = \frac{1}{2} \tag{29}$$

飞行器的翼展面积是一个上底为l_4，下底为 $2l_4$，高为 10m 的梯形。由此可以得出一侧机翼翼肋的平均受力公式：

$$f = \frac{0.5 * 10 * \rho v^2 C_f l_1}{(\sum_{i=1}^{6} C_i^{i6} (l_5 - l_3) q^4) + 3(l_5 - l_3)} \tag{30}$$

由于需要让翼肋平均受力尽可能小的同时，为了节省材料和减少飞机重量，翼肋的数量要尽可能少。因此不妨将翼肋的平均受力与翼肋总数相乘作为目标函数，转化为单目标优化问题：

$$\min = (\frac{0.5 * 10 * \rho v^2 C_l l_1}{(\sum_{i=1}^{6} C_{i6}^{i} (l_5 - l_3) q^4) + 3(l_5 - l_3)}) \sum_{i=1}^{6} C_{i6}^{i} \tag{31}$$

取空气密度ρ=1.225kg/m³ ，飞行速度v=100m/s，升力系数C_l=1.5。因此机翼结构优化模型是一个 0-1 混合整数规划模型 ：

$$\min = (\frac{9.1875 * 10^4 l_1}{(\sum_{i=1}^{6} C_{i6}^{i} (l_5 - l_3) q^4) + 3(l_5 - l_3)}) \sum_{i=1}^{6} C_{i6}^{i} \tag{32}$$

$$s.t. \begin{cases} C_{i6}^{i} \in \{0,1\} \\ 0.45 \le l_4 \ll 0.55 \\ 0.65 \le l_5 \le 0.9 \\ q^7 = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{33}$$

其中，l_3的值已经在机身外形-舱体结构优化模型的求解过程中被确定为0.109999m。

运用 python 语言对模型进行编程，并调用 scipy 库中的 minimize 求解器，指定求解算法为“SLSQP”，得到机翼结构参数与最小平均载荷见表 6：

表 6 机翼结构参数

参数	数值
$C_{l_6}^1$	1
$C_{l_6}^2$	1
$C_{l_6}^3$	0
$C_{l_6}^4$	1
$C_{l_6}^5$	1
$C_{l_6}^6$	0
l_4	0.5165
l_5	0.7645
平均载荷	0.2652MPa

通过对机身与机翼采取不同模型进行优化，在使得阻力最小的情况下，求解出最佳外形，提高飞行器的设计水平，获得性能更为优异的总体方案，可应用于类似飞行器的总体优化设计中，对工业部门具有较强的参考意义。

5.4 问题四模型的建立与求解

本问以双锥体为基础，在飞行器后体采用二次曲线控制横截面外形，并采用模线设计法构造非圆截面弹身。之后构建这类截面为二次曲线的飞行器气动力计算方法，建立优化设计模型并计算。最后，对优化后的飞行器布局的气动特性进行了进一步的研究。

5.4.1 截面曲线设计方法

首先根据需要将飞行器沿纵向划分成若干纵向控制站位，然后在每个控制站位上生成不同的横截面控制点，并用光滑曲线连接形成横截面形状，最后将各个横截面控制点用光滑的纵向曲线连接起来。横截面形状是机身设计的关键之一。

其二次曲线的一般方程形式如下：

$$aX^2 + bXY + cY^2 + dY + eY + f = 0 \qquad (34)$$

二次曲线可以看成是平面斜切圆锥所得，通过改变切面的角度，可以获得圆、椭圆、抛物线及双曲线等二次曲线(图 11)。假设 A 点为飞行器机身铅垂平面与横截面在背风面的交点，B 点为水平面与横截面的交点， C 点为过点 A 及点 B 的切线的交点，则肩点 E 控制平面 ABC 内过 A、B 点的二次曲线形状。若点 D 为$\overline{AB}$直线的中点，引入二次曲线形状参数ρ，且$\rho = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{DC}|}$则可以通过控制形状参数ρ 的取值，唯一地确定肩点 E 的位置，并进而唯一地确定二次曲线 AEC 的形状。

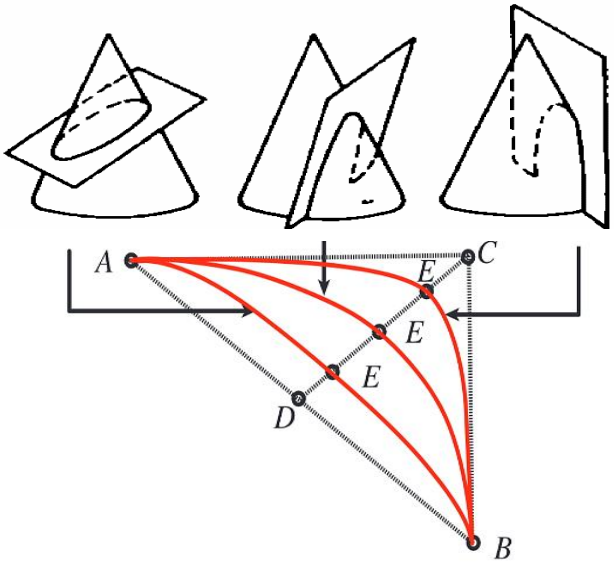


图 11 平面切圆锥二次曲线示意图

本文中横截面形状将由以下 5 个参数确定：0°背风子午线控制点半径r_1、90°侧向子午线控制点半径r_2、180°迎风子午线控制点半径r_3、上半身二次曲线形状参数ρ_1及下

半机身二次曲线形状参数ρ_2。

5.4.2 高超声速气动力估算方法

本文通过引入等价锥及等价横截面等概念，对速度比和动压比进行考虑和修正，并引入了前体对后体的气动影响的计算方法，使得内伏牛顿理论推广发展到非圆截面外形，从而预估飞行器气动特性。计算中，机身面元上的压力系数C_p为：

$$C_p = C_{p0} + f(X^*, M) \cdot C_{pmax} \cdot \left(\frac{U_\perp}{U}\right)^2 + f_1\left(\frac{U_\perp}{U}, M\right) + f_2(R_e, T_\omega) + f_3(\delta^*, R_e, M) \tag{35}$$

$$\frac{U_\perp}{U} = \vec{V} \cdot \vec{N} \tag{36}$$

其中，$\vec{V}$、$\vec{N}$、M分别为来流速度矢量、物面内法向矢量及马赫数。C_{p0}为爆炸波压力系数，C_{pmax}为驻点压力系数，$f(X^*, M)$为动压比修正函数，f_1、f_2、f_3分别为背风面低压修正、粘性修正及边界层位移厚度修正，R_e、T_ω、δ^*分别为雷诺数、壁面温度及边界层位移厚度。

5.4.3 多目标优化遗传算法

多目标数学规划问题可以描述为寻找一个决策变量的向量x^*，满足约束条件下，使目标函数向量$f(x^*)$达到最优,即:

$$\begin{cases} V_{min} f(\boldsymbol{x}) = [f_1(x), f_1(x), \cdots, f_n(x)]^T \\ x \in X \\ X \in R^m \end{cases} \tag{37}$$

其中V_{min}表示向量目标函数，若设$X \in R^m$是多目标优化模型的约束集，$f(x) \subseteq R^m$是多目标优化时的向量目标函数，若有解$x_1 \in X$并且x_1优于X中的所有其他解则称解x_1是多目标优化模型的最优解。

为了提升遗传算法的效率，本文针对遗传算法易出现的遗传欺骗问题进行了改进。通过将 Pareto 非劣解概念与遗传算法思想相结合，并采用实数编码、小生境淘汰、群体排序、稳态复制和动态惩罚等技术，克服了标准遗传算法的缺点，提高了优化效率。同时，在进化中后期引入模拟退火算法进行局部搜索，最终形成了一种适用于复杂优化问题的多目标混合遗传算法。

5.4.4 升力体外形优化设计模型

飞行器在无动力滑翔再入阶段的总体性能涉及多个方面，包括升阻特性（以升阻比衡量）、驻点气动热特性（以机身头部驻点温度表示）、稳定性以及机身内部容积等。设计目标是在满足一系列外形约束条件和性能指标的前提下，优化飞行器的气动外形，使其在滑翔状态下实现最大的气动升阻比和容积利用率。

•约束条件

采用多目标优化混合遗传算法对飞行器进行了多约束的气动升阻比优化设计。主要的约束条件包括

①机身驻点温度限制:T_s ＜ 1470K。

②纵向、航向静稳定性限制:纵向均为静稳定静稳定度小于2%。纵向、侧向最大可用过载限制n_{vk}＞1.5, n_{vk}＜0.5。

③最大舵偏角限制:δ＜20°。

•设计变量

通过对整个通用再入飞行器的数值建模提取其外形参数作为设计变量上机身二次曲线形状参数ρ_1，下机身二次曲线形状参数ρ_2，飞翼几何参数展弦比λ，根稍比η和前缘后掠角χ_0，飞翼面积 S，方向舵几何参数展弦比λ_f，根稍比η_f和前缘后掠角χ_{of}，舵面面积 S_f，升降副翼几何参数展弦比λ_s，相对厚度 c 与舵面面积S_s。

以典型飞行状态高度 30km，Ma＝ 6 ，迎角20°，舵偏角0°。设定种群规模为 500 交叉概率为 0.8，变异概率为 0.2，最大进化代数为 400。进化到 327 代后种群收敛得到如表 8 所示的再入飞行器 Pareto 最优解。

表 8 优化设计下的 Pareto 解

截面形	K	V_u	T_s/K	X_g	λ	χ_0 /(°)	η	χ_{of} /(°)	$\psi_{x\omega}$ /(°)	S_f $/dm^2$	S_d $/dm^2$
抛物线	3.015	0.6321	1235	0.65	5.95	48.81	1.1052	57.53	67.43	0.2526	0.6021
圆	2.857	0.5812	1190	0.637	4.965	45.57	1.1254	52.33	65.48	0.3415	0.6529
双曲线	2.623	0.6321	1154	0.645	4.862	49.35	1.1328	60.28	69.35	0.3181	0.6929
椭圆	2.758	0.5568	1319	0.656	5.368	50.21	1.3542	54.57	70.12	0.4538	0.6403

表 8 中，K为飞行器中机身横截面分别为抛物线、圆、双曲线和椭圆时的升阻比，V_u为容积利用效率，T_s为飞行器头部驻点温度，X_g为质心系数为质心距头部的距离与特征长度之比，λ、χ_0及η为飞翼参数，χ_{of}、 S_f和S_d为方向舵舵面参数，$\psi_{x\omega}$为布局的控制参数。

根据表 8 的数据，双曲线截面在利用率方面表现最佳，并且双曲线截面的头部驻点温度最低。综合考虑各个性能指标，本文选择在主要性能指标得到一定优化，同时允许次要性能指标在可接受范围内做出一定牺牲的方案，以显著提升主要性能指标。因此，本文推荐以双曲线截面为特征的 Pareto 解作为通用再入飞行器外形设计的方案，其外形轮廓如图 12 所示：

图 12 最优构型的飞行器外形

5.4.5 结果验证

为了进一步验证推荐方案的气动特性本文采用 CFD 方法开展气动特性的仿真分析．图 13 给出了 Ma＝ 6 攻角20°条件下飞行器表面的压力分布特性。

图 13 表面压力分布（Ma＝ 6 ， AoA＝20°）

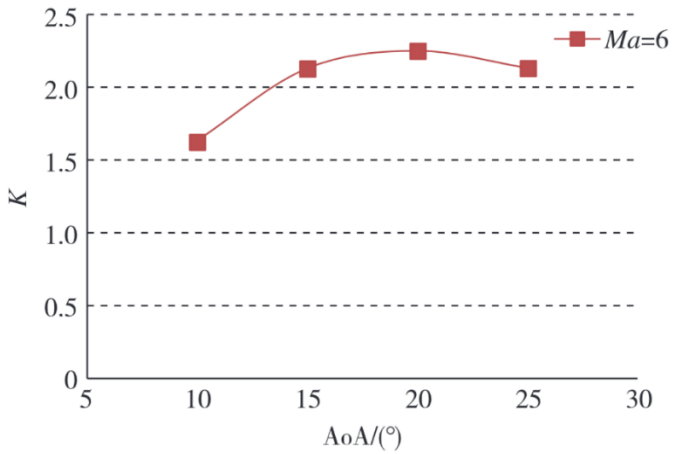


图 14 升阻比随攻角的变化

图 14 给出了在 Ma＝ 6 条件下升阻比随攻角的变化情况可以看出飞行器在攻角20°时升阻比达到最大值 22.5 与 Pareto 解相差约 12%，基本上定性验证了优化结果。

六、模型评价与改进

6.1 模型的优点分析

●将代理模型的预测最优值作为每步迭代的新增样本之一的 Kriging 代理模型的加点准则可以改善搜索的局部收敛性；

●本文发展的方法可以满足方案论证和初步设计阶段对气动系数的精度需求；

●采用二次曲线方程并引入二次曲线形状参数，结合优化设计技术可以方便快速地获得 各种截面外形，而且可以提高设计质量和设计效率， 值得进一步的深人研究和推广应用；

6.2 模型的缺点分析

●本文建立的模型使用的参数较多，计算时可能会存在误差，影响模型精度。

●尽管本文考虑了多种气动、结构 指标，但仍没有考虑某些重要因素（如屈曲、颤振、 内装燃油、外挂发动机等）；

●本文提出的方法应用于概念设计阶段，省略了额外的几何细节及相关负载，因此本文优化结果可能过于理想；

参考文献

[1]王国辉,王小军,杨勇,等.火箭基组合循环(RBCC)推进系统研究现状[J].固体火箭技术,2003,(03):1-3+6.

[2]唐伟,张鲁民.弯体机动再入飞行器气动特性研究[J].空气动力学学报,1996,(01):86-91

[3]赵琳瑜,杨琴文,张锋,等.基于 Ansys Workbench 的火箭支架结构拓扑优化设计[J].计算机辅助工程,2024,33(02):6-9.DOI:10.13340/j.cae.2024.02.002.

[4][1]林威全,许航瑞,兰旭东.TBCC 发动机的发展历程及关键技术分析[J/OL].清华大学学报(自然科学版),1-15[2024-07-08].https://doi.org/10.16511/j.cnki.qhdxxb.2024.27.024

.[5] [1]董一韩,曾森,周祥.基于遗传算法优化 BP 神经网络的 RC 柱骨架曲线预测[J].中国水运(下半月),2024,24(07):34-36.

[6]李昊,廖志刚,杨令飞,等.高速飞行器气动外形设计方法综述[J].空天技术,2024,(01):23-35.DOI:10.16338/j.issn.2097-0714.20230351.

选题	2024 年第十四届 APMCM 亚太地区大学生数学建模竞赛（中文赛项）	参赛编号
A		apmcm24103112

基于空气动力学和遗传算法的飞行器外形优化设计

摘要

飞行器的外形设计不仅关乎其飞行的稳定性和安全性，还直接影响其燃料效率、阻力大小及最终的任务成败。本文通过构建以飞行器所受阻力最小为目标的飞行器外形优化设计模型，旨在提高飞行器的飞行效率和性能。

针对问题一，为求解该部分飞行器的表面积和体积，考虑到飞行器的对称结构，选择使用拆分法将其分为一块主体和两侧机翼。针对飞行器主体部分，假设飞行器外形曲线和横截面分别为二次抛物线和椭圆面，积分求解各自的表面积和体积。针对飞行器机翼部分，合题目提供的侧视图及骨架参数化示意图可进一步进一步将其分为前部与后部，累加求和。matlab 求解得，该飞行器整体的表面积和体积分别 $5.0712 \times 10^7 \mathrm{cm}^2$ 和 $8.4852 \times 10^7 \mathrm{cm}^3$。

针对问题二，为求解飞行器舱体结构的表面积和体积，将其拆分为半球体和圆柱体两部分。对于半球体部分，根据半径R_1, R_2可分为 4 个小半球(R_1)和 2 个大半球(R_2)，且无需计算半球体的底面积。值得注意的是，连接体部分同样为圆柱体，共 4 个。分析可得，飞行器舱体由一个大圆柱体，两个小圆柱体和四个连接体(仍为圆柱体)、两个大半球体和四个小半球体构成。求解得，舱体的表面积和体积分别为 $9.7739 \times 10^5 \mathrm{cm}^2$ 和 $3.7566 \times 10^7 \mathrm{cm}^3$。

针对问题三，本文构建以飞行器所受阻力最小为目标，以飞行器的物理模型和参数结构取值范围等为约束构建飞行器外形优化设计模型。结合问题一与问题二，首先对飞行器进行受力分析，构造飞行器所受阻力与其表面积及体积的函数关系模型。为简化模型，忽略姿态角的变化，考虑使用流体阻力计算其空气阻力。参考相关文献，设置空气密度为 1.225kg/m^3，飞行器飞行速度为 250m/s，空气阻力系数为 0.08，遗传算法求解得：最小阻力为 54118842.1966N，l_3为 0.29039486。粒子群算法求解得，最小阻力为 54208967.1075N，l_3为 0.1676173。其余飞行器结构参数最优值详见表 5-9 与 5-10。对比发现蚁群算法的求解优度较高。

针对问题四，本文在问题三的基础上，分别针对四种圆锥曲线相应修改，目标函数不变，约束条件的变化具体如表 5-12 所示，采用遗传算法重新求解问题三飞行器的最佳外形设计问题。对比可得，在四种圆锥曲线中，以双曲线作为飞行器曲线所受阻力最低，为 54118952.96N。参数矩阵为$[0.3375851,0.47902355,...,355.25455845]$，四种圆锥曲线的求解结果具体如表 5-13 至 5-16 所示。

最后本文评价了所构建的基于空气动力学和蚁群算法的飞行器外形优化设计的优点及不足之处，并阐释其推广应用的方向。

关键词：遗传算法；粒子群算法；空气动力学；飞行器外形优化

一、问题背景

1.1 问题背景

飞行器的外形优化是航空航天领域中一项至关重要的科学问题。无论是在大气层内还是外，飞行器的外形直接影响其性能和效率。大气层内飞行的航空器依赖于空气动力学原理，而太空中的航天器则面临更为严苛的环境和运动要求。

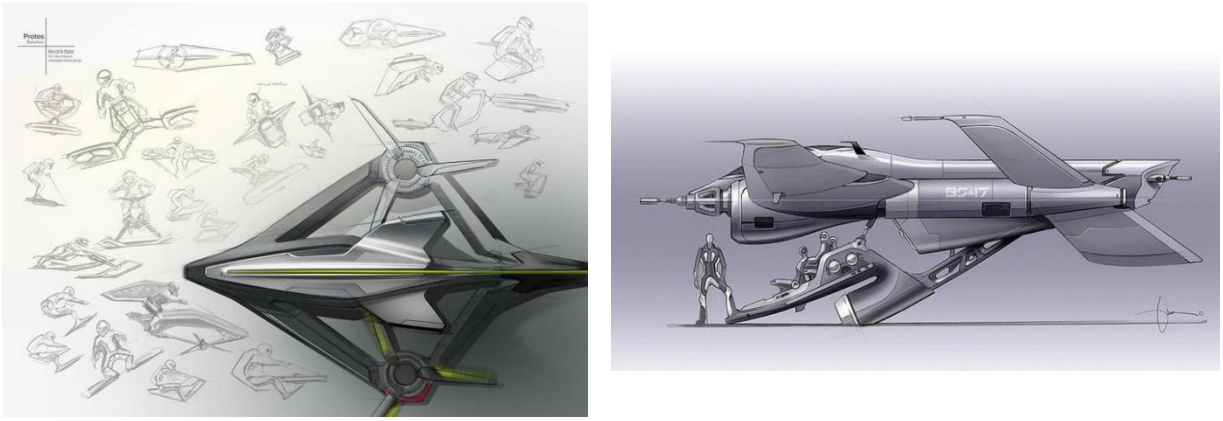


图 1-1 飞行器外形优化设计

飞行器的外形设计不仅关乎其飞行的稳定性和安全性，还直接影响其燃料效率、阻力大小及最终的任务成败。

1.2 研究目的与意义

本文通过构建以飞行器所受阻力最小为目标的飞行器外形优化设计模型，旨在提高飞行器的飞行效率和性能。具体而言：

(1)最小化阻力：通过数学建模和计算分析，寻找飞行器外形的最佳参数组合，使其在给定速度下的空气阻力最小化。这不仅可以节省燃料，还能提升飞行器的速度和稳定性。

(2)优化设计方法：探索并比较不同的优化算法（如遗传算法、粒子群算法和蚁群算法等），以确定最适合于飞行器外形优化的算法。这些算法能够帮助在复杂的设计空间中搜索最优解，从而在设计阶段就能够减少试验成本和时间。

(3)应用推广：将优化后的飞行器外形设计推广到实际应用中，包括各种航空航天器的设计和改进，从而提升整个航空航天工业的竞争力和技术水平。

这些研究目标的实现具有重要的科学意义和实际应用价值，不仅可以推动飞行器设计技术的进步，还有助于解决现实世界中复杂飞行条件下的挑战。通过优化飞行器的外形设计，我们能够更好地探索和利用空气动力学规律，为未来的航空航天事业奠定坚实的基础。

二、问题重述与分析

题目在背景部分阐释了飞行器的含义、发展历程，进而表述优化飞行器的外形，减少阻力对于航空航天事业的重大意义。

问题一主要要求我们估计某飞行器的表面积和体积。

问题二在问题一的基础上提高了问题复杂度，该舱体结构为图 1 的主要部分。

问题三则进一步要求我们设计飞行器的最佳外形。需要设计的参数主要包括骨架结构和舱体结构。

问题四要求我们在问题三的基础上，针对圆形、椭圆、抛物线和双曲线等四种圆锥曲线，分别考虑作为图 1 飞行器的外形，重新设计其最佳外形，并求解飞行器相应的结构参数。

三、模型假设

实际飞行过程中，飞行器的飞行效果往往受到风力的影响。在风力较大的情况下，飞行器往往需要保持特殊的姿态才可以正常进行悬停或飞行等操作，因此必须作出如下假设。

假设 1：假设将飞行器整体视作刚体，即忽略弹性形变对飞行器受力等情况的影响。

假设 2：假设飞行器的质量分布均匀，质心位于原点。

假设 3：忽略地球自转与公转对飞机飞行的影响。

假设 4：不考虑风等空气流动队飞行器受力的影响。

四、符号说明

符号	说明	单位
S_{front}	飞行器前部的表面积	cm^2
V_{front}	飞行器前部的体积	cm^3
h	前部高	cm
l	后部高	cm
S_{back}	飞行器后部的表面积	cm^2
V_{back}	飞行器后部的体积	cm^3
a	椭圆截面长轴	cm
b	椭圆截面短轴	cm
w	宽度	cm
L	机翼长度	cm
F_d	空气阻力	N
c_d	物体阻力系数	/
ρ	空气密度	kg/m^3
v	飞行器相对于空气的速度	m/s
S	飞行器在空气中的横截面积	m^2
$S_{cylinder_large}$	大圆柱体表面积	cm^2
$S_{cylinder_small}$	小圆柱体表面积	cm^2

*其余未说明的符号将在正文详细展示。

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 飞行器结构拆分

根据前文分析，问题一要求我们估计某飞行器的表面积和体积。飞行器的尺寸示意图具体如图 5-1 所示：

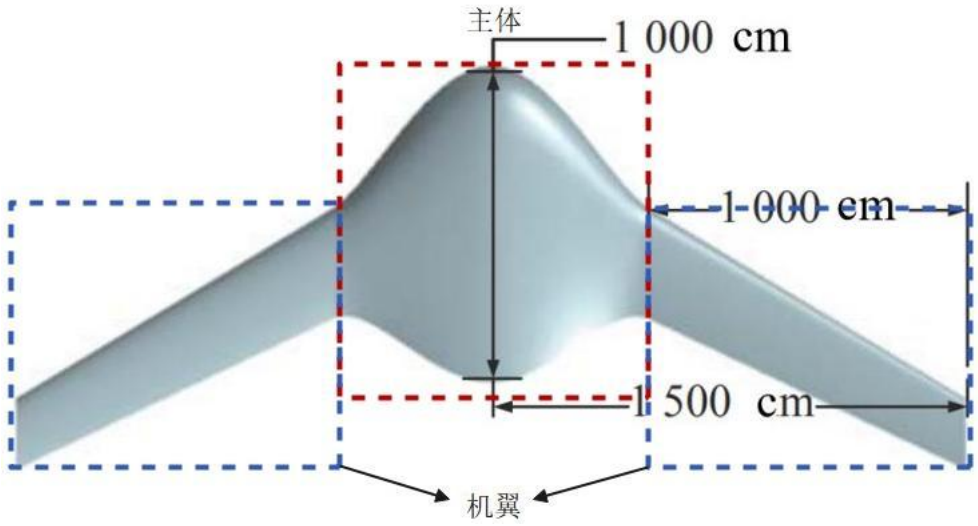


图 5-1 飞行器部分尺寸示意图

在实际计算飞行器表面积和体积的计算中，考虑到飞行器的对称结构，最常用的方法为拆分法，观察图 5-1 发现，该飞行器主要由主体和机翼两部分构成。

对于主体部分，可将其进一步拆解为前部和后部。鉴于题目未提供飞行器截面的厚度信息，本文假定其为椭球面，则截面为椭圆。对于机翼部分，结合骨架参数化示意图，认为其由双抛物线组成，本文将在 5.1.2 和 5.1.3 节进一步阐释。

5.1.2 飞行器主体

在 5.1.1 节中，本文将该部分飞行器细分为一块主体和两侧机翼，对于主体。本文将其细分为前部和后部。具体如图 5-2 所示

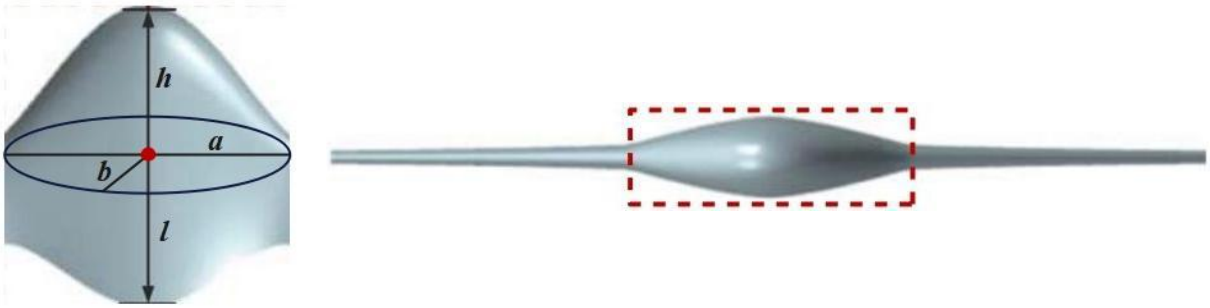


图 5-2 主体结构示意图

图 5-2 中涉及的各项参数具体如表 5-1 所示：

表 5-1 飞行器主体外形参数

名称	符号	名称	符号
前部高	h	椭圆截面长轴	a
后部高	l	椭圆截面短轴	b

在假设飞行器外形曲线和横截面分别为二次抛物线和椭圆面后，可分别计算飞行器主体前后部的表面积和体积。

记飞行器前部的表面积和体积分别为S_{front}, V_{front}，后部的表面积和体积分别为S_{back}, V_{back}。计算公式具体如式(5-1)至(5-4)所示：

$$S_{front} = \int_0^h 2\pi b\sqrt{\frac{h-y}{h}} - 4(a-b)\sqrt{1-\frac{y}{h}}dy = \frac{2h}{3}(2\pi b + 4a - 4b) \tag{5-1}$$

$$V_{front} = \int_0^h \frac{\pi ab(h-y)}{h}dy = \frac{\pi abh}{2} \tag{5-2}$$

$$S_{back} == \int_0^h 2\pi b\sqrt{\frac{l-y}{h}} - 4(a-b)\sqrt{1-\frac{l}{h}}dy = \frac{2l}{3}(2\pi b + 4a - 4b) \tag{5-3}$$

$$V_{back} = \int_0^l \frac{\pi ab(l-y)}{l}dy = \frac{\pi abl}{2} \tag{5-4}$$

故主体整体的表面积和体积$S_{main\ body}, V_{main\ body}$分别如式(5-5)和(5-6)所示：

$$S_{main\ body} = S_{front} + S_{back} \tag{5-5}$$

$$V_{main\ body} = V_{front} + V_{back} \tag{5-6}$$

5.1.3 飞行器机翼

由前文分析可得，仅由图 5-1 难以判断机翼的真实物理结构，结合题目提供的侧视图及骨架参数化示意图可进一步判断。

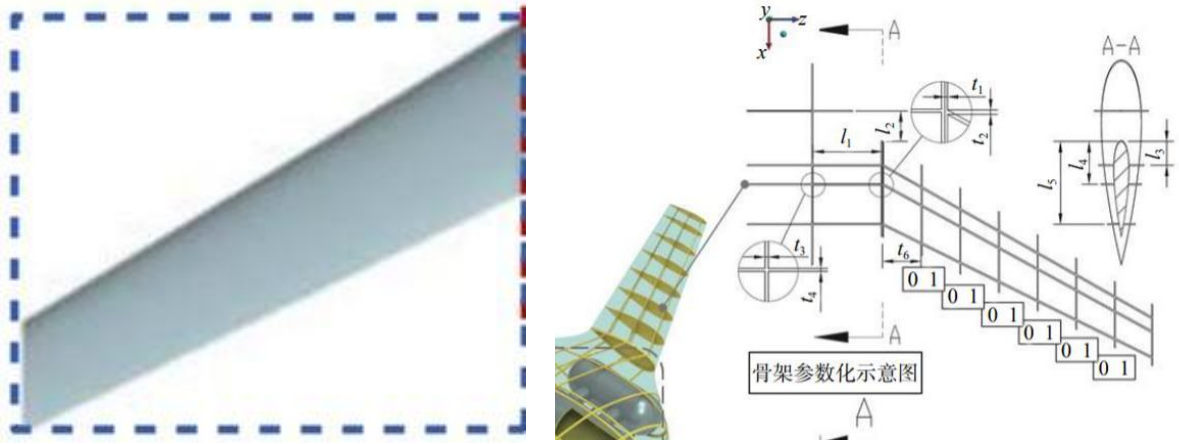


图 5-3 机翼示意图

图 5-3 右图展示了机翼的横截面，涉及的各项参数具体如表 5-2 所示：

表 5-2 飞行器机翼外形参数

名称	符号	名称	符号
前部高	l_3	宽度	w
后部高	$l_5 - l_3$	机翼长度	L

于是，飞行器机翼的前后部弧长L_{front}, L_{back}分别如式(5-7)和(5-8)所示：

$$L_{front} = \int_{-w}^{w} \sqrt{\frac{1 + 4l_3^2 x^2}{w^4}} dx \tag{5-7}$$

$$L_{back} = \int_{-w}^{w} \sqrt{\frac{1 + 4(l_5 - l_3)^2 x^2}{w^4}} dx \tag{5-8}$$

于是，机翼整体表面积计算公式如式(5-9)所示：

$$S_{wing} = (L_{front} + L_{back}) \times L \tag{5-9}$$

同理，飞行器机翼的前后部截面积s_{front}, s_{back}分别如式(5-10)和(5-11)所示：

$$s_{front} = \int_{-w}^{w} (-\frac{l_3}{w^2} x^2 + l_3) dx \tag{5-10}$$

$$s_{back} = \int_{-w}^{w} (-\frac{l_5 - l_3}{w^2} x^2 + l_5 - l_3) dx \tag{5-11}$$

于是，飞行器机翼体积计算如式(5-12)所示：

$$V_{wing} = (s_{front} + s_{back}) \times L \tag{5-12}$$

5.1.4 模型求解

由 5.1.2 和 5.1.3 节分别求解飞行器主体和机翼的表面积和体积后，累加求和，即可得该部分飞行器整体的表面积和体积S_1, V_1，具体如式(5-13)和(5-14)所示：

$$S_1 = S_{main\ body} + S_{wing} \tag{5-13}$$

$$V_1 = V_{main\ body} + V_{wing} \tag{5-14}$$

通过 matlab 求解，结果如表 5-3 所示：

表 5-3 问题一求解结果

	主体	机翼	整体
表面积(cm^2)	8.8219×10^5	4.9830×10^7	5.0712×10^7
体积(cm^3)	8.4823×10^7	2.8800×10^4	8.4852×10^7

由表 5-3 可知，该飞行器整体的表面积和体积分别 $5.0712 \times 10^7 cm^2$和 $8.4852 \times 10^7 cm^3$。

5.2 问题二模型的建立与求解

5.2.1 舱体结构拆分

同问题一类似，问题二要求我们估算飞行器舱体结构的表面积和体积。具体如图 5-4 所示，同理，可将其拆分为半球体和圆柱体两部分。

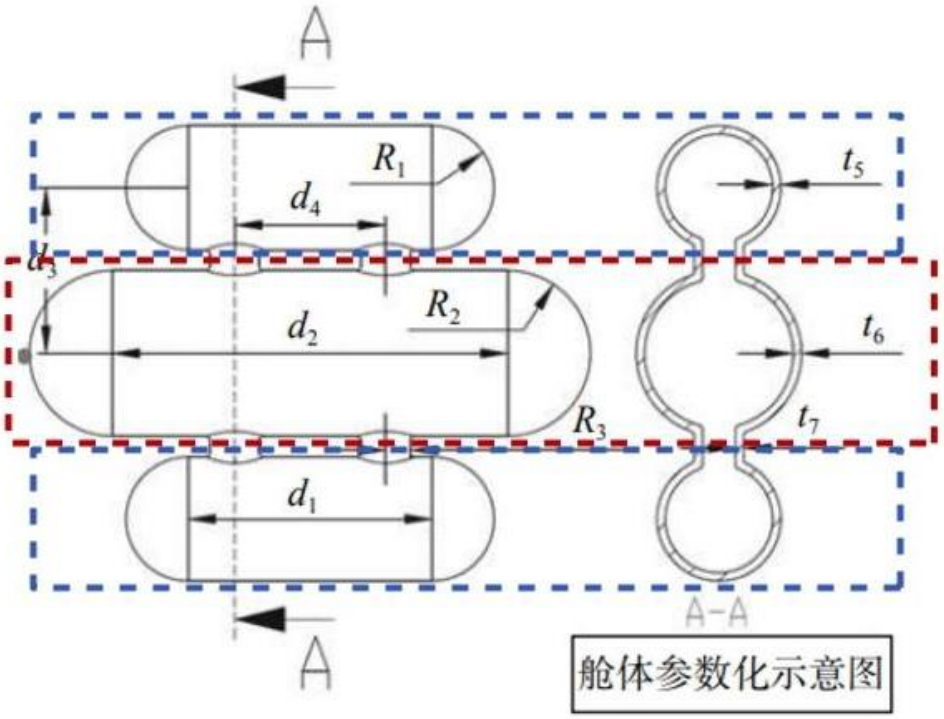


图 5-4 飞行器舱体结构示意图

其中，半球体位于圆柱体两侧，可合并成一完整球体。本文将在 5.2.2 和 5.2.3 节分别探讨半球体和圆柱体模型。

5.2.2 半球体模型

观察图 5-4 可得，对于半球体部分，根据半径R_1, R_2可分为 4 个小半球(R_1)和 2 个大半球(R_2)。

由于无需计算半球体的底面积，因此，对于大小半球表面积计算分别如式(5-15)和(5-16)所示：

$$S_{hemisphere_large} = 2\pi R_2^2 \tag{5-15}$$

$$S_{hemisphere_small} = 2\pi R_1^2 \tag{5-16}$$

同理，大小半球体积$V_{hemisphere_large}, V_{hemisphere_small}$计算分别如式(5-17)和(5-18)所示：

$$V_{hemisphere_large} = \frac{2}{3}\pi R_2^3 \tag{5-17}$$

$$V_{hemisphere_small} = \frac{2}{3}\pi R_1^3 \tag{5-18}$$

5.2.3 圆柱体模型

分析可得，大小圆柱体的体积$V_{cylinder_large}$,$V_{cylinder_small}$分别如式(5-19)和(5-20)所示：

$$V_{hemisphere_large} = \pi R_2^2 \times d_2 \tag{5-19}$$

$$V_{hemisphere_small} = \pi R_1^2 \times d_1 \tag{5-20}$$

值得注意的是，连接体部分同样为圆柱体，共 4 个。

于是，连接体的表面积和体积$S_{connector}$,$V_{connector}$分别如式(5-21)和(5-22)所示：

$$S_{connector} = 2\pi R_3 \times (d_3 - R_1 - R_2) \tag{5-21}$$

$$V_{connector} = \pi R_3^2 \times (d_3 - R_1 - R_2) \tag{5-22}$$

同样不考虑底面积，大小圆柱体的表面积$S_{cylinder_large}$,$S_{cylinder_small}$分别如式(5-23)和(5-24)所示：

$$S_{hemisphere_large} = 2\pi R_2 d_2 - 4\pi R_3^2 \tag{5-23}$$

$$S_{hemisphere_small} = 2\pi R_1 d_1 - 2\pi R_3^2 \tag{5-24}$$

5.2.4 模型求解

根据 5.2.2 和 5.2.3 节的分析，本文最终构建飞行器舱体结构的表面积和体积计算模型。飞行器舱体由一个大圆柱体，两个小圆柱体和四个连接体(仍为圆柱体)、两个大半球体和四个小半球体构成。于是，表面积和体积S_2,V_2计算公式如(5-25)和(5-26)所示：

$$S_2 = S_{hemisphere_large} + 2S_{hemisphere_small} + 4S_{connector} + S_{hemisphere_large} + S_{hemisphere_small} \tag{5-25}$$

$$V_2 = V_{hemisphere_large} + 2V_{hemisphere_small} + 4V_{connector} + V_{hemisphere_large} + V_{hemisphere_small} \tag{5-26}$$

通过 matlab 求解，结果如表 5-4 所示：

表 5-4 问题二求解结果

名称	表面积(cm^2)	体积(cm^3)
大圆柱体	1.9068×10^5	1.9068×10^6
小圆柱体	1.5346×10^5	7.8540×10^6
连接体	3.1667×10^4	3.8001×10^5
大半球	5.0894×10^4	1.5268×10^6
小半球	6.2832×10^4	2.0944×10^6
舱体	9.7739×10^5	3.7566×10^7

由表 5-4 可知，舱体的表面积和体积分别为 $9.7739 \times 10^5 cm^2$ 和 $3.7566 \times 10^7 cm^3$。

5.3 问题三模型的建立与求解

5.3.1 模型准备

问题三首先给出了该飞行器参数结构的取值范围，及耦合结构其他的参数设置，具体如表 5-5 和表 5-6 所示：

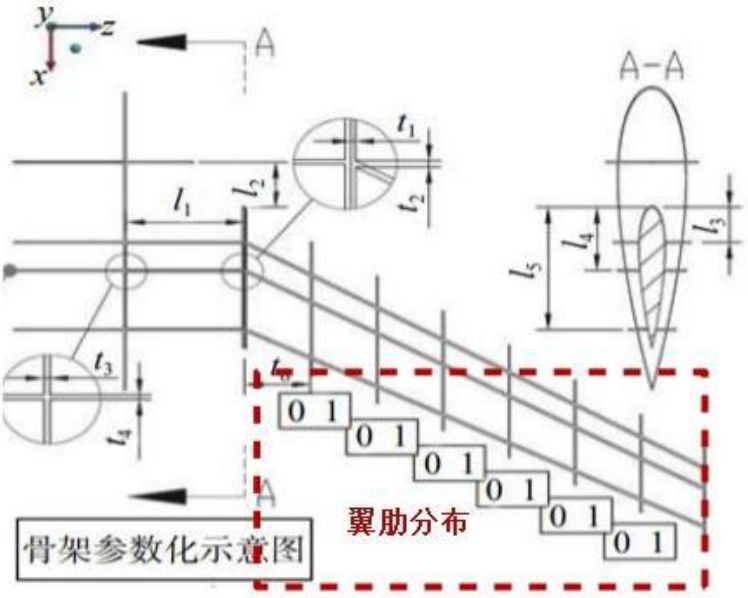
表 5-5 该飞行器参数结构取值范围

设计变量类型	参数	设计下限	设计上限
骨架结构设计变量	$c_{l_6}^i$	0	1
	l_1	270cm	290cm
	l_3	0.1	0.35
	l_4	0.45	0.55
	l_5	0.65	0.9
舱体结构设计变量	R_1	65cm	90cm
	R_2	75cm	100cm
	R_3	20cm	30cm
	t_5	8cm	15cm
	t_6	8cm	15cm
	t_7	8cm	15cm
	G_C	350cm	450cm

表 5-6 耦合结构其他参数设置

参数	数值(固定值)
l_6	143cm
机翼半展长	1000cm
机身半展长	500cm
l_2	120cm
d_1	250cm
d_2	350cm
d_4	150cm

其中，关于机翼半展长，补充描述如下，翼肋平均分布后共计 8 个，使其中间的 6 个翼肋为 0-1 离散变量，定义为$c_{l_6}^i$，其中 1 表示此处布置有翼肋，0 表示未布置翼肋，如图 5-5 所示：



$$c_{l_6}^i = \begin{cases} 1, \text{此处布置有翼肋} \\ 0, \text{此处未布置有翼肋} \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, 6)$$

图 5-5 翼肋 0-1 离散变量描述

问题三要求我们设计飞行器的最佳外形，使得其所受阻力最小，因此需要在问题一与问题二求解得到的飞行器部分尺寸和舱体结构的相关数据，进行受力分析，构造飞行器所受阻力与其表面积及体积的函数关系模型，设置为目标函数，以飞行器的物理模型和表 5-5 及 5-6 的参数结构取值范围等为约束构建优化模型。

5.3.2 飞行器空气动力学模型

在实际飞行过程中，飞行器的飞行效果往往受到风力的影响。在风力较大的情况下，飞行器往往需要保持特殊的姿态才可以正常进行悬停或飞行等操作，因此必须作出如下假设：

(1)假设将飞行器整体视作刚体，即忽略弹性形变对飞行器受力等情况的影响。

(2)假设飞行器的质量分布均匀，质心位于原点。

(3)忽略地球自转与公转对飞机飞行的影响。

(4)不考虑风等空气流动队飞行器受力的影响。

为简化模型，忽略姿态角的变化，考虑使用流体阻力计算其空气阻力，此处涉及空气动力学的相关知识，具体如式(5-27)所示：

$$F_d = \frac{1}{2} \times c_d \times \rho v^2 \times S \tag{5-27}$$

其中涉及的相关符号及参数表示分别如表 5-7 所示：

表 5-7 空气动力学(空气阻力)相关符号

符号	描述	单位
F_d	空气阻力	N
c_d	物体阻力系数	/
ρ	空气密度	$\mathrm{kg/m^3}$
v	飞行器相对于空气的速度	$\mathrm{m/s}$
S	飞行器在空气中的横截面积	$\mathrm{m^2}$

*物体阻力系数c_d与物体的几何形状密切相关。在实际计算过程中，应充分考虑飞行器的几何形状、表面粗糙程度等影响因素。综合考虑本文涉及的飞行器主体及机翼的几何形状，选择飞行器的空气阻力系数为 0.08。

5.3.3 飞行器结构参数设计模型

• 目标函数

由题设得，以飞行器所受阻力最小为优化目标，因此设置目标函数如式(5-28)所示：

$$\min F_d = \frac{1}{2} \times c_d \times \rho v^2 \times S \tag{5-28}$$

• 约束条件

由 5.1 和 5.2 节可知，飞行器的主体和机翼整体的体积和表面积，舱体的体积和表面积分别如式(5-13)、(5-14)、(5-25)和(5-26）所示，即：

$$\begin{cases} S_1 = S_{main\ body} + S_{wing} \\ V_1 = V_{main\ body} + V_{wing} \\ S_2 = S_{hemisphere_large} + 2S_{hemisphere_small} + 4S_{connector} + S_{hemisphere_large} + S_{hemisphere_small} \\ V_2 = V_{hemisphere_large} + 2V_{hemisphere_small} + 4V_{connector} + V_{hemisphere_large} + V_{hemisphere_small} \end{cases} \tag{5-29}$$

由表 5-5 和 5-6 可得飞行器参数结构取值范围约束，其中，骨架结构设计变量约束具体如式(5-30)所示：

$$\begin{cases} c_{l_6}^i = \{0,1\} \\ l_1 \in (270,290) \\ l_3 \in (0.1,0.35) \\ l_4 \in (0.45,0.55) \\ l_5 \in (0.65,0.9) \end{cases} \tag{5-30}$$

其中，$c_{l_6}^i$为描述翼肋布置的 0-1 离散变量，l_1, l_3, l_4, l_5为实数变量，分别表示骨架结构的长度比例。

同理，舱体结构设计变量约束具体如式(5-31)所示：

$$\begin{cases} R_1 \in (65,90) \\ R_2 \in (75,100) \\ R_3 \in (20,30) \\ t_5 \in (8,15) \\ t_6 \in (8,15) \\ t_7 \in (8,15) \\ G_c \in (350,450) \end{cases} \tag{5-31}$$

其中，R_1, R_2, R_3是描述舱体结构半径的变量，t_5, t_6, t_7是描述舱体结构壁厚的变量，G_c为描述舱体结构长度的变量。

至此，本文构建了基于最小空气阻力的飞行器外形设计模型，如式(5-32)所示：

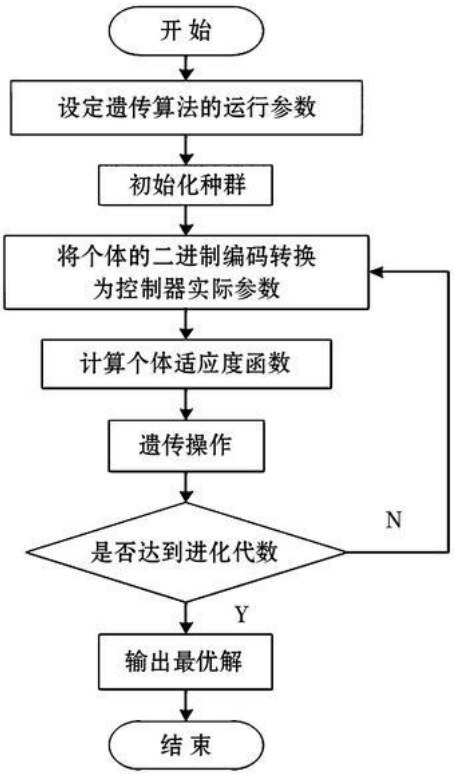
$$\min F_d = \frac{1}{2} \times c_d \times \rho v^2 \times S$$

$$\begin{cases} \begin{cases} S_1 = S_{main\ body} + S_{wing} \\ V_1 = V_{main\ body} + V_{wing} \end{cases} \\ \begin{cases} S_2 = S_{hemisphere_large} + 2S_{hemisphere_small} + 4S_{connector} + S_{hemisphere_large} + S_{hemisphere_small} \\ V_2 = V_{hemisphere_large} + 2V_{hemisphere_small} + 4V_{connector} + V_{hemisphere_large} + V_{hemisphere_small} \end{cases} \\ \begin{cases} c_{l_6}^i = \{0,1\} \\ l_1 \in (270,290) \\ l_3 \in (0.1,0.35) \\ l_4 \in (0.45,0.55) \\ l_5 \in (0.65,0.9) \end{cases} \\ \begin{cases} R_1 \in (65,90) \\ R_2 \in (75,100) \\ R_3 \in (20,30) \\ t_5 \in (8,15) \\ t_6 \in (8,15) \\ t_7 \in (8,15) \\ G_c \in (350,450) \end{cases} \end{cases} \tag{5-32}$$

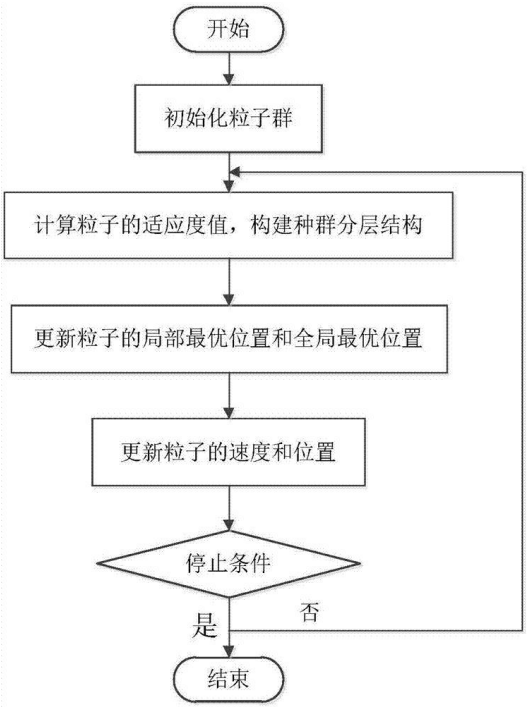
5.3.4 模型求解与分析

针对 5.3.3 节构建的于最小空气阻力的飞行器外形设计模型，分贝考虑使用遗传算法和粒子群算法进行求解。

遗传算法与粒子群算法的算法原理分别如图 5-6 所示：



(a)遗传算法



(b)粒子群算法

图 5-6 问题三求解算法原理

在正式求解之前，需要设置部分题目未补充的参数：

表 5-8 问题三初始参数设置

变量	数值
空气密度	1.225kg/m^3
飞行器飞行速度	250m/s
空气阻力系数	0.08

多次运行取最优值，遗传算法求解结果具体如表 5-9 所示：

表 5-9 问题三求解结果(遗传算法)

变量	l_3	l_4	l_5	R_1	R_2
数值	0.29039486	0.52943786	0.72904604	77.89533426	75
变量	R_3	t_5	t_6	t_7	G_c
数值	20.00000075	8.74795829	13.64077802	10.25186972	399.94922192
最小阻力			54118842.19660542		

粒子群算法求解结果具体如表 5-10 所示：

表 5-10 问题三求解结果(粒子群算法)

变量	l_3	l_4	l_5	R_1	R_2
数值	0.1676173	0.47414186	0.88610813	73.05581391	75.06242333
变量	R_3	t_5	t_6	t_7	G_c
数值	23.2333983	12.17986537	12.12635147	11.45507542	438.47120911
最小阻力			54208967.10751903		

对比可得，遗传算法求解的最小阻力略小于粒子群算法的求解结果，因此本文将在问题四种继续沿用遗传算法进行求解。

5.4 问题四模型的建立与求解

5.4.1 模型准备

问题四要求我们在问题三的基础上，分别考虑圆形、椭圆、抛物线和双曲线等四种圆锥曲线作为飞行器的外形，重新求解问题三飞行器的最佳外形设计问题。

四种圆锥曲线的数学表达式分别如式(5-33)-(5-36)所示：

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{5-33}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5-34}$$

$$y = ax^2 + bx + c \tag{5-35}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5-36}$$

其对应的表面积和体积计算公式如表 5-11 所示：

表 5-11 圆锥曲线表面积与体积计算公式

圆锥曲线	表面积	体积
圆形	$S = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
椭圆	$S = \frac{4}{3}\pi ab$	$V = \frac{4}{3}\pi abc$
抛物线	$S = \frac{2h}{3}(2\pi b + 4a - 4b)$	$V = \frac{4}{3}\pi ab^3$
双曲面	$S = \frac{4}{3}\pi ab$	$V = \frac{4}{3}\pi abc$

5.4.2 飞行器外形设计模型的修改

分别针对上述四种圆锥曲线进行问题三模型的相应修改，目标函数不变。以圆形和椭圆形为例，约束条件的变化具体如表 5-12 所示：

表 5-12 圆锥曲线约束条件的修改情况

(1)圆形	(2)椭圆
$\begin{cases} S=4\pi r^2 \\ V=\frac{4}{3}\pi r^3 \\ L_{front}=\int_{-w}^{w}\sqrt{\frac{1+4l_3^2x^2}{w^4}}dx \\ L_{back}=\int_{-w}^{w}\sqrt{\frac{1+4(l_5-l_3)^2x^2}{w^4}}dx \\ s_{front}=\int_{-w}^{w}(-\frac{l_3}{w^2}x^2+l_3)dx \\ s_{back}=\int_{-w}^{w}(-\frac{l_5-l_3}{w^2}x^2+l_5-l_3)dx \\ \begin{cases} c_{l_6}^i=\{0,1\} \\ l_1\in(270,290) \\ l_3\in(0.1,0.35) \\ l_4\in(0.45,0.55) \\ l_5\in(0.65,0.9) \end{cases} \\ \begin{cases} R_1\in(65,90) \\ R_2\in(75,100) \\ R_3\in(20,30) \\ t_5\in(8,15) \\ t_6\in(8,15) \\ t_7\in(8,15) \\ G_c\in(350,450) \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} S=\frac{4}{3}\pi ab \\ V=\frac{4}{3}\pi abc \\ L_{front}=\int_{-w}^{w}\sqrt{\frac{1+4l_3^2x^2}{w^4}}dx \\ L_{back}=\int_{-w}^{w}\sqrt{\frac{1+4(l_5-l_3)^2x^2}{w^4}}dx \\ s_{front}=\int_{-w}^{w}(-\frac{l_3}{w^2}x^2+l_3)dx \\ s_{back}=\int_{-w}^{w}(-\frac{l_5-l_3}{w^2}x^2+l_5-l_3)dx \\ \begin{cases} c_{l_6}^i=\{0,1\} \\ l_1\in(270,290) \\ l_3\in(0.1,0.35) \\ l_4\in(0.45,0.55) \\ l_5\in(0.65,0.9) \end{cases} \\ \begin{cases} R_1\in(65,90) \\ R_2\in(75,100) \\ R_3\in(20,30) \\ t_5\in(8,15) \\ t_6\in(8,15) \\ t_7\in(8,15) \\ G_c\in(350,450) \end{cases} \end{cases}$

同理可得抛物线和双曲面的约束条件修改情况，根据问题三求解结果对比情况，选择采用遗传算法分别求解，具体如表 5-13 至 5-16 所示：

表 5-13 问题四结果(圆形)

变量	l_3	l_4	l_5	R_1	R_2
数值	0.29665119	0.45363407	0.66506088	71.02304087	75
变量	R_3	t_5	t_6	t_7	G_c
数值	20.01684394	8.91071452	14.67916857	10.98125362	400
最小阻力			54118952.959026754		

表 5-14 问题四结果(椭圆)

变量	l_3	l_4	l_5	R_1	R_2
数值	0.25778851	0.52188039	0.89453149	89.7818264	80
变量	R_3	t_5	t_6	t_7	G_c

数值	20	14.21907487	12.84702446	10.61729238	391.70384814
最小阻力			61575216.01035995		

表 5-15 问题四结果(抛物线)

变量	l_3	l_4	l_5	R_1	R_2
数值	0.16676257	0.50232208	0.79027447	85.22452258	80
变量	R_3	t_5	t_6	t_7	G_c
数值	20	12.58762584	13.88673419	12.9939267	371.2670316
最小阻力			61575216.01035995		

表 5-16 问题四结果(双曲面)

变量	l_3	l_4	l_5	R_1	R_2
数值	0.3375851	0.47902355	0.66612663	75.7253441	75.00007675
变量	R_3	t_5	t_6	t_7	G_c
数值	20	10.01777504	12.94344705	10.06627302	355.25455845
最小阻力			54118842.19660542		

由表 5-13 至 5-16 可得，在四种圆锥曲线中，以双曲线作为飞行器曲线所受阻力最低，为 54118952.96N。参数矩阵为[0.3375851,0.47902355,...,355.25455845]

六、模型的评价与推广

6.1 模型的优点

(1)本文通过对飞行器外形的细致拆分和参数化建模，能够全面分析飞行器的表面积、体积及最小化空气阻力的关系。这种综合性的方法使得设计能够在多个方面进行优化，包括减少阻力、提高效率等。通过对比遗传算法、粒子群算法的求解结果，本文确定遗传算法在优化飞行器外形设计中表现较好。这种多算法比较能够确保最终选取的设计方案更为优化和合理。

(2)本文在模型构建中采用了二次抛物线、椭圆面等简化的几何曲线，以及将飞行器拆分为主体和机翼部分的方法，简化了复杂问题的处理过程。这种简化提高了模型的实用性，使得设计结果更易于理解和应用于实际工程中。

(3)通过基于空气动力学的物理模型和大量计算分析，本文不仅探索了最小化阻力的理论极限，还为实际飞行器的设计和改进提供了深入的科学依据和指导。这种科学性保证了设计方案在实际应用中的可靠性和有效性

6.2 模型的不足与改进

(1)本文在建模过程中忽略了飞行器的姿态角变化对阻力的影响，这在实际飞行中可能会有所偏差。此外，实际飞行器设计中还涉及到诸如材料选择、结构强度、制造成本等复杂因素，这些因素在本文中未被全面考虑。

(2)虽然遗传算法在本文中表现优越，但不同飞行器的外形和设计问题可能需要不同的优化算法或组合，算法的适用性可能受到设计空间复杂性的限制。

6.3 模型的推广

基于本文的研究成果，可推广的方向有：

(1)将优化设计方法推广到不同类型的航空器和航天器上，包括无人机、载人飞船、卫星等，以提升它们的飞行效率和性能。

(2)结合材料科学、结构工程等领域，进一步优化飞行器的整体设计，包括减重和提高强度等方面。

(3)将模型结果与实际飞行器的测试数据进行比较和验证，进一步验证模型的有效性和适用性。

(4)开发基于优化算法和空气动力学模型的智能化设计工具，支持工程师在设计阶段快速生成优化方案。

通过这些推广方向，可以进一步推动飞行器设计技术的进步，促进航空航天领域的科学研究和实际应用。

参考文献

[1] 李昊,廖志刚,杨令飞,等.高速飞行器气动外形设计方法综述[J].空天技术,2024,(01):23-35.DOI:10.16338/j.issn.2097-0714.20230351.

[2] 郑和超.一种仿鸟扑翼飞行机器人的控制器设计研究[D].北方工业大学,2023.DOI:10.26926/d.cnki.gbfgu.2023.000770.

[3] 王健磊,牟桓,魏震,等.宽包线吸气式高超声速飞行器外形优化研究[J].空气动力学学报,2023,41(02):1-11.

[4] 池元成,张冶,郑小鹏,等.飞行器气动外形的正交设计与分析[J].宇航总体技术,2022,6(01):50-54.

[5] 朱朝,李中武,刘峰博.飞行器气动外形优化系统研究[J].航空计算技术,2021,51(06):96-100.

[6] 解静,白鹏,李永远.基于遗传算法的升力体外形优化设计[J].气体物理,2020,5(04):31-36.DOI:10.19527/j.cnki.2096-1642.0814.

[7] 苏晓东.一种 U 型变体无人飞行器气动外形技术研究[J].中国科技信息,2020,(05):38-41.

[8] 许云清.四旋翼飞行器飞行控制研究[D].厦门大学,2014.

[9] 张艳军.高速飞行器空气动力学数值分析[D].中北大学,2007.

[10] 王磊,何国毅,王娜,等.高超声速飞行器的气动力工程计算[J].南昌航空大学学报(自然科学版),2020,34(01):1-6.

[11] 刘沛清,郭知飞.飞行器的升力、阻力及升力与环量定理的起源[J].力学与实践,2019,41(06):739-744.

[12] 刘俊,任杰,赤丰华,等.局部外形参数对高速飞行器的 RCS 影响[J/OL].系统工程与电子技术,1-14[2024-07-07].http://111.229.208.102:8085/kcms/detail/11.2422.tn.20240510.1232.005.html.

选题	2024 年第十四届 APMCM 亚太地区大学生数学建模竞赛（中文赛项）	参赛编号
B		apmcm24100536

基于关键特征集成学习的洪水灾害数据分析与预测研究

摘要

针对问题 1，首先计算出所给数据季风强度、地形排水等基础指标和洪水概率的最大值、最小值、平均值、中位数等基本统计量，完成数据预处理，随后对各个指标及洪水概率进行可视化分析，并计算上述所有指标分布的偏度与峰度系数，结果可得**训练集和测试集中各指标分布均呈现轻微的正偏态(右偏)和尖峰厚尾，训练集洪水概率分布呈现正态分布**。随后，引入 Spearman 相关系数进相关性分析，并加以假设检验，**发现各指标之间呈现独立性，同时均与洪水概率呈现有层次的正相关关系**，随后取相关性**平均值以上的指标为高相关性指标**，并对其进行相应分析，提出相关建议与措施。

针对问题 2，首先标准化洪水概率数据，利用 **K-Means++聚类算法**将其聚类为高、中、低风险三大类，随后对聚类结果进行可视化分析，基于簇进行数据表分组，并计算每个分组的最大、最小值，验证**数据完整聚类为三簇无交错类别**，计算三组数据表指标统计量，得出**指标数值与风险高低呈现正相关性，且不同指标在同一风险类别中呈现相似的数据分布情况**。评价问题定义为回归+分类，首先基于分组数据中最大、最小值构造**回归数值与分类类别之间的映射区间**，并训练**逻辑回归分类模型**实现**映射区间的缺漏填充，**成功**构建完整的映射区间**，随后，基于原始 20 指标构建**线性回归模型**作为**基准模型**，**R2 分数 0.84，三分类准确率 0.76**，得出指标与洪水概率之间**存在正线性相关性**，并对所有**指标之和**与洪水概率进行可视化确认其间**呈强正线性相关性**，引入指标和作为关键引导指标，然后将原始指标在**样本维度升序排列**，构造排序指标，以**消除指标维度数据差异性**，最后，将**排序指标与指标和**作为最终指标训练 **CatBoost 回归模型**实现了**优于基准模型的效果，R2 分数 0.87**，并且其在三分类任务上同样表现优秀，**三分类准确率 0.76**，同时，利用 **K 折交叉验证法**验证了模型的**低灵敏度与高泛化性。**

针对问题 3，首先基于问题 1 中各指标与洪水概率相关性选出**相关性大于平均值的指标**，加入**指标和**作为关键指标，训练 CatBoost 回归模型，得出较优回归预测模型。随后，使用 **PCA 主成分分析**进行数据降维，将 20 维指标降至 **4 维关键指标**，同时依旧加入**指标和**组成 5 个指标，用以训练 CatBoost 回归模型，得出**性能远胜基准模型**的最优回归预测模型，**R2 分数 0.97，**同时作为佐证，求出**其三分类准确率 0.91**。

针对问题 4，直接选用问题 3 中得出的最优 CatBoost 回归模型进行预测，填写预测结果，并对结果使用直方图、折线图进行可视化分析，计算其偏度、峰度系数，得出**预测结果服从正态分布**，并与其他性能较低回归模型进行对比，验证其预测结果正态性与合理性。

关键词：CatBoost 回归模型 线性回归模型 逻辑回归分类模型 连续映射区间构造 K-Means++聚类算法 PCA 主成分分析 K 折交叉验证

一、问题重述

1.1 问题背景

洪水作为一种严重的自然灾害，对人类社会和生态环境造成了巨大的影响。历史上，洪水灾害的发生往往与自然因素如暴雨、融冰化雪、风暴潮等有关。然而，随着人口的增长和人类活动的增加，如乱砍滥伐、围湖造田等，这些活动加剧了地表状态的改变，进而影响了汇流条件和洪水灾害的程度。近年来，全球洪水灾害频发，造成了巨大的经济损失和人员伤亡。因此，对洪水灾害进行数据分析与预测，对于提前预警和减少灾害损失具有重要意义。

1.2 问题要求

附件数据给出了各地季风强度、地形排水、河流管理等基本信息，以及该地发生洪水的概率。为了能更好地根据已知信息预测洪水的发生概率，最小化灾害损失，现需结合实际情况与所给信息建立数学模型，分析以下问题：

问题 1：依据附件 1 中给出的基本信息，可视化处理相关数据，并单独分析洪水发生概率与每个基本信息的相关性，判断其关联程度大小，给出相关结论和建议。

问题 2：将 train.csv 中洪水发生的概率聚类成不同风险类别，分析高、中、低风险洪水事件的指标特征。选取合适的指标，计算不同指标的权重，建立预警评价模型，并进行模型的灵敏度分析。

问题 3：基于问题 1 中指标分析的结果，建立洪水发生概率的预测模型。从 20 个指标中选取合适指标，预测洪水发生的概率，并验证模型的准确性。探讨如果仅用 5 个关键指标，如何调整改进预测模型。

问题 4：利用问题 2 中建立的洪水发生概率预测模型，预测附件 test.csv 中所有事件的洪水发生概率，并将结果填入 submit.csv。绘制预测概率的直方图和折线图，分析其分布特征，判断是否服从正态分布。

附件：

1. train.csv - 包含超过 100 万条洪水数据，涵盖洪水事件 id 和 20 个指标得分，以及发生洪水的概率。
2. test.csv - 包含超过 70 万条洪水数据，涵盖洪水事件 id 和 20 个指标得分，缺少发生洪水的概率。
3. submit.csv - 包含 test.csv 中的洪水事件 id，缺少发生洪水的概率。

二、问题分析

2.1 问题 1 的分析

针对问题 1，首先对 train.csv 中所给数据进行最大值、最小值、平均值、中位数等基本统计量计算、数据预处理等基础性工作,并记录洪水概率的最大、最小值，基于这些数据，采用概率密度直方图、核密度估计（Kernel Density Estimation, KDE）图可视化洪水概率的分布情况，同时用频数统计直方图可视化 train.csv 与 test.csv 中季风强度、地形排水等各个指标特征的分布情况，并计算上述所有指标分布的偏度与峰度系数用以量化各项评估指标与洪水概率的分布

情况。随后，引入 Spearman 相关系数进相关性分析，并加以假设检验，用以量化各项指标与洪水概率之间的关系。最后，综合以上获得的相关性、数据分布情况等分析结果进行统计分析，指出对洪水概率影响较大的指标，并据此提出相应的预防措施。

2.2 问题 2 的分析

针对问题 2，首先标准化 train.csv 中洪水概率数据，并利用 K-Means++聚类算法将其聚类为三簇，随后对聚类结果进行箱型图、频数分布直方图可视化，基于簇进行数据表分组，并计算每个分组的最大、最小值，用以评估聚类结果是是否存在交错，最后划分风险为高、中、低三类，将其作为分类标签，并对其分别进行统计分析可视化，用以分析不同风险对应指标特征。风险预警评价问题实质是基于连续数值到逻辑类别区间映射的回归+分类的合并问题，首先基于先前得出的三类分组数据中最大、最小值构造连续回归数值转离散类别数值的映射，并训练逻辑回归模型建立符合分布的洪水概率到风险等级的连续映射，实现有空缺映射区间的填充工作，以保证最终回归+分类模型评价能力的鲁棒性，随后，基于所有指标构建线性回归模型作为基准模型，实现较优结果，探索指标特征与洪水概率间潜在的线性相关性，并对所有指标之和与洪水概率进行可视化以确认其线性相关性，因此引入指标和作为关键指标，然后将季风强度、地形排水等指标在样本维度上从小到大排序，构造排序指标，从而消除指标维度上的数据差异性，最后，将排序指标与指标和作为最终指标训练 CatBoost 模型实现了优于基准模型的效果，并且其在三分类评价任务上同样表现优秀，同时，利用 K 折交叉验证法验证了模型的低灵敏度与高泛化性。

2.3 问题 3 的分析

针对问题 3，首先基于问题 1 分析出的各指标与洪水概率的 Spearman 相关系数选出相关性较高的指标特征作为基本指标，并加入指标和作为关键指标，训练 CatBoost 回归模型，得出较优回归预测模型。随后，使用主成分分析（Principle Component Analysis，PCA）进行数据降维，将 20 维指标特征降至 4 维作为关键指标，同时依旧加入指标和组成 5 个指标，用以训练 CatBoost 回归模型，得出最优回归预测模型。

2.4 问题 4 的分析

针对问题 4，直接选用问题 3 中得出的最优 CatBoost 回归模型进行 test.csv 的特征工程，才用最优 5 个关键指标进行结果预测，于 submit.csv 中填写预测结果，并对预测结果使用直方图、折线图（随机采样 1000 样本）进行可视化分析，计算其偏度峰度系数，分析其分布正态性，并与其他两个性能较低的 CatBoost 回归模型进行分布对比，验证其预测结果正态性与合理性。

文章总体思路如图 1 所示：

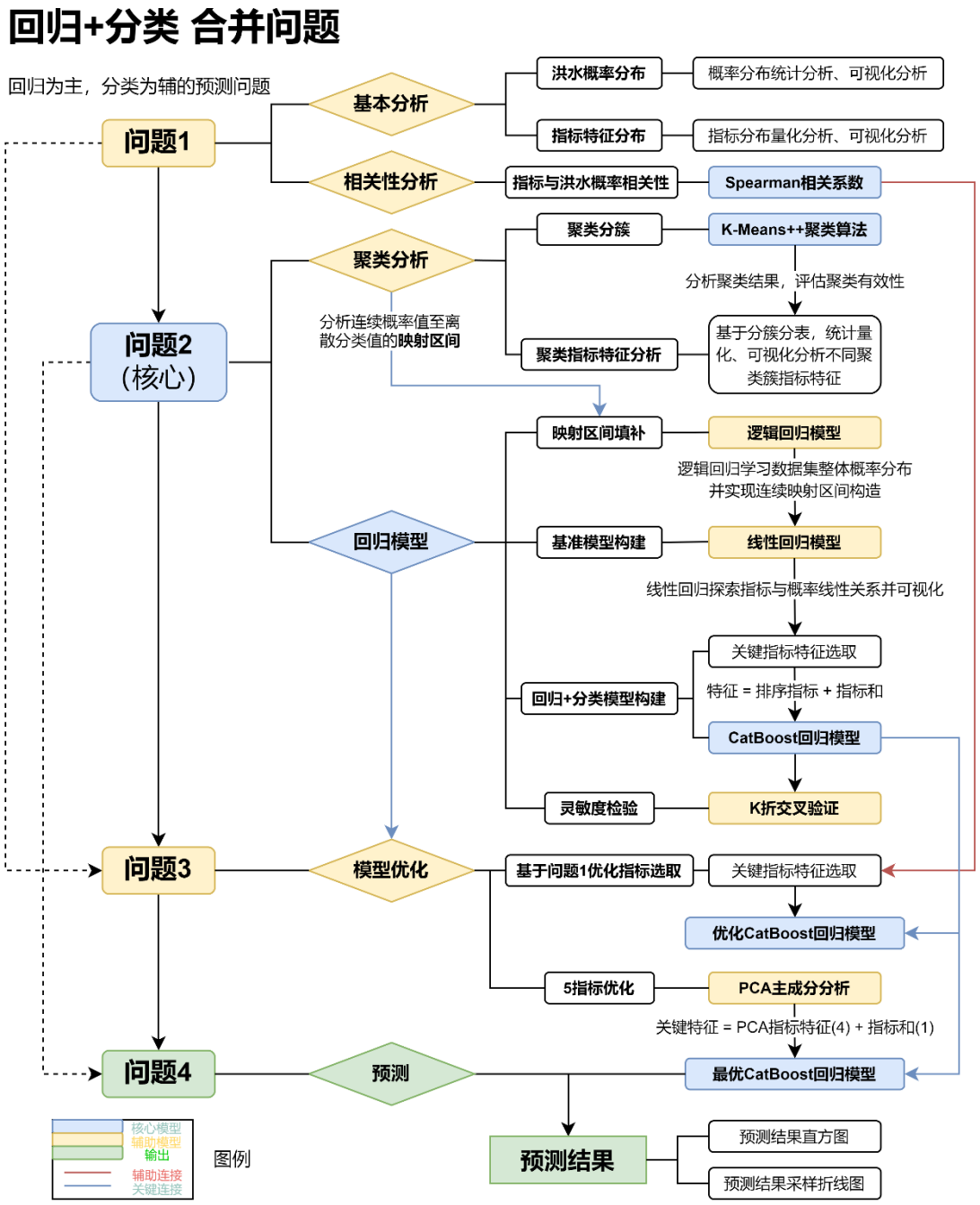


图 1 总体思路图

三、模型假设

根据上述问题分析，我们做出如下假设：

1. 假设洪水发生的概率和影响因素在短期内相对稳定，即考虑的时间范围内没有显著的气候或人为变化。。
2. 假设使用的历史数据或观测数据是准确和可靠的，能够充分反映洪水发生的情况和影响因素的变化。

四、符号说明

符号	说明
K_u	峰度系数
S_u	偏度系数
ρ	Spearman 相关系数
$d(x_i, c_j)$	x_i与c_j之间的欧氏距离
ω_i	权重系数
x_i	样本点 x 的第 i 个分量
L	损失函数
$\hat{y}$	预测值
Org-20	使用最初的 20 个指标
Sorted-20	使用 20 个指标的排序指标
Sum-1	使用 20 个指标的和作为指标
Selected-10	使用精选的 10 个指标
PCA-4	使用 PCA 后得到的 4 个最主要的成分作为指标

五、问题 1 模型的建立与求解

5.1 基于数据的数字特征进行描述

题目要求对数据进行可视化处理，为了更好地描述洪水发生概率分布、基本信息特征的分布规律，本文引入峰度系数、偏度系数来描述统计数据。

（1）峰度系数

峰度系数（Kurtosis）用于衡量数据分布的峰度程度。例如$K_u=0$时，数据的分布为正态分布；$K_u<0$时，数据分布的峰度较小，数据更分散；$K_u>0$时，数据分布的峰度较大，数据更集中。并且$|K_u|$越大，数据分布的图像更加“陡峭”。峰度系数K_u的计算公式如下：

$$K_u = E[(\frac{X-\mu}{\sigma})^4] = (\frac{\mu}{\sigma})^4$$

（2）偏度系数

偏度系数（Skewness）用于衡量数据分布的偏斜程度。例如$S_k=0$时，数据的分布为正态分布；$S_k<0$时，数据呈左偏分布；$S_k>0$时，数据呈右偏分布。并且$|S_k|$越大，数据分布的偏斜越明显。峰度系数S_k的计算公式如下：

$$S_k = E[(\frac{X-\mu}{\sigma})^3] = (\frac{\mu}{\sigma})^3$$

5.2 数据可视化

首先对原始数据进行可视化分析，作出洪水发生概率密度图像与核密度估计图像，并在其左上角展示分布的偏度峰度，图像如下：

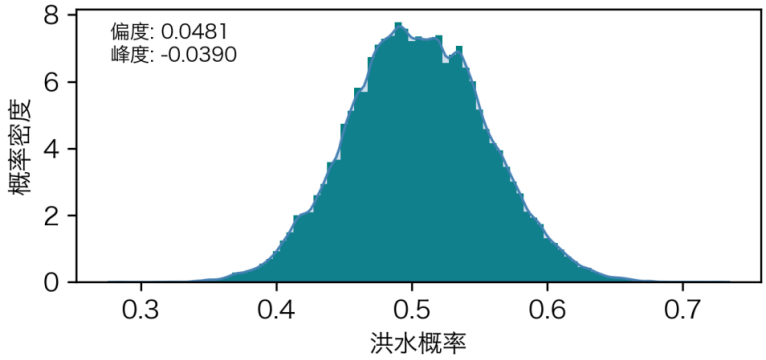


图 2 洪水概率密度图

可见洪水概率分布基本**符合正态分布**。

基本指标的分布直方图如下：

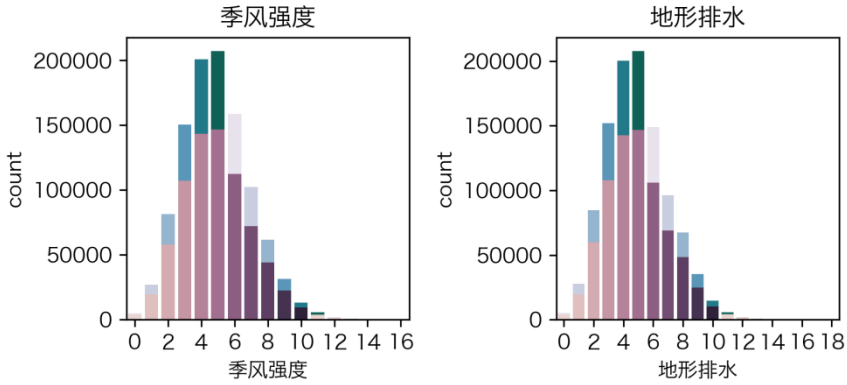


图 3 部分指标柱状图

图中紫红色为测试集分布情况，蓝绿色为训练集分布情况此处仅采样季风强度与地形排水的指标分布情况进行可视化，其余指标的分布情况基本相同，且均呈现出**训练、测试集服从基本相同的分布且训练集数据量比测试集大 40%左右。**

下面对已有已有数据进行定量分析，统计训练集、测试集中数据分布的偏度与峰度系数。

表 1 数据集指标偏、峰度统计量

	训练集偏度系数	训练集峰度系数	测试集偏度系数	测试集峰度系数
平均值	0.441813837	0.247223868	0.44093833	0.247306689
标准差	0.011392705	0.035052238	0.012480602	0.034875173
最小值	0.419867945	0.187350475	0.413857617	0.182297125
25%	0.436629875	0.232680673	0.435625489	0.228729943
50%	0.441398792	0.243670623	0.442318853	0.246637074
75%	0.449001103	0.262154138	0.449952157	0.263493856
最大值	0.464098419	0.339472861	0.460378327	0.315153435

基于上表定量数据对整个数据集的分析如下：

1. 偏度系数：平均偏度系数接近 0.44，表明数据分布呈现轻度的正偏态（右偏），即大部分数据分布在均值左侧，尾部向右延伸。其标准差较小，说明各个指标的偏度相对一致。最小值和 25%分位数显示有些指标的偏度较低，而 75%分位数和最大值则显示少数指标有较高的正偏度。

2. 峰度系数：平均峰度系数在 0.24 到 0.25 之间，略高于 0（正态分布的峰

度系数为 3），表明数据分布相对于正态分布有轻微的尖峰厚尾特性。峰度的标准差相对较大，说明不同指标的峰度差异较大。

3. 分布一致性：训练集和测试集的偏度和峰度系数非常接近，这表明两个数据集在分布形状上具有较高的一致性。

4. 数据范围：最小值和最大值展示了数据分布的整个范围，可以看出指标值在 0.4 到 0.46 之间变化，这可能表明数据的变异性有限。

5. 中位数（50%分位数）：中位数接近平均值，进一步确认了数据分布的正偏态。

6. 四分位数间距（IQR）：通过比较 25%和 75%分位数，可以观察到数据的分散程度。IQR 较小，表明大部分数据点集中在中位数附近。

7. 异常值：由于偏度和峰度系数的值并不极端，可能没有明显的异常值，但最大值和最小值的指标可能需要进一步检查是否有异常值。

整体而言，数据集的分布**呈现轻微的正偏态(右偏)和轻微的尖峰厚尾，但整体分布相对集中。**

5.3 利用 Spearman 相关系数判断指标与洪水概率之间的相关性

Spearman 相关系数是一种非参数的相关性度量，可以等级化变量之间相关性，并且不局限于线性关系，适用于非线性关系的评估，其计算公式如下：

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{N}(R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{[\sum_{i=1}^{N}(R_i - \bar{R})^2 \sum_{i=1}^{N}(S_i - \bar{S})^2]^{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{N(N^2-1)}$$

其中，R_i与S_i均为对应观测值第 i 个取值的等级，$[\bar{R}]$与$[\bar{S}]$均为对应观测值取值的平均等级，N 为观测值的总数量，$d_i = R_i - S_i$。

Spearman 相关系数评估了两变量之间的单调关系，即两个变量同时增加（或减少）时相关系数趋近于 1（或-1）；两个变量的变化之间未出现明显关系时趋近于 0。

5.4 Spearman 相关系数的检验

本文对 20 个指标采取 Spearman 相关系数检验，检验步骤如下：

(1)提出假设

原假设$H0$：Spearman 系数$\rho \neq 0$

备择假设$H1$：Spearman 系数$\rho = 0$

设定置信水平为 **99.5%**

(2) 计算 P 值

本文采用 Python 中 statsmodels 中 multipletests 进行 Spearman 相关系数检验，得出所有指标之间以及所有指标与洪水概率之间的修正后 Spearman 相关系数。将结果拆分为两个表，分别展示指标之间以及指标与洪水概率之间的 Spearman 相关系数：

指标之间 Spearman 相关系数表如下（由于大小限制详情见附表）：

表 2 Spearman 相关系数检验的 P 值

	季风强度	地形排水	河流管理	...	政策因素
季风强度	1.0000	0.0000	0.0000	...	0.0000
地形排水	0.0000	1.0000	0.0000	...	0.0000
河流管理	0.0000	0.0000	1.0000	...	0.0000

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
政策因素	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

表 2 是 Spearman 相关系数检验的 P 值构成的矩阵，其对角线元素为 1，其余元素均为 0，即其为单位矩阵，可知任意两指标之间的 P 值均为 0，故接受原假设，认为 Spearman 系数$\rho \neq 0$。

将其可视化为热力图如下：

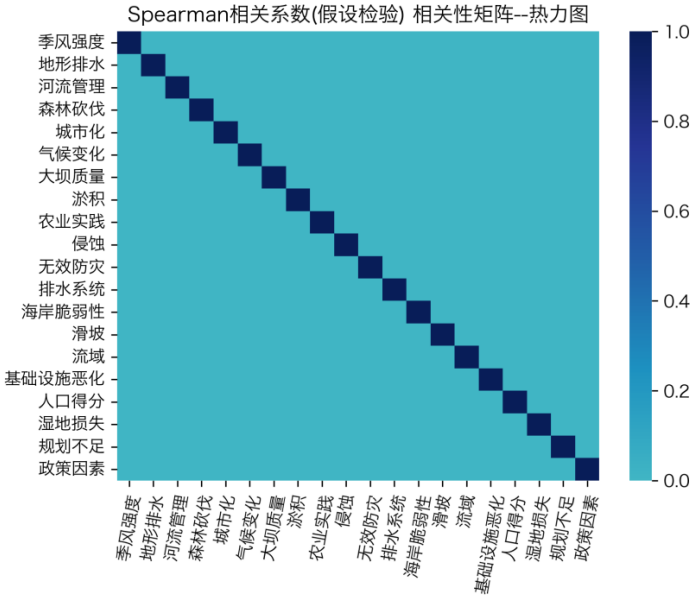


图 4 Spearman 相关系数（假设检验）相关性矩阵

从上图可直观看出指标数据之间呈现出**完全独立性**。

假设检验之后指标与洪水概率之间 Spearman 相关系数：

由上表可知：

表 3 Spearman 相关系数

季风强度	地形排水	河流管理	森林砍伐	城市化
0.18028	0.18048	0.17893	0.17701	0.17265
气候变化	大坝质量	淤积	农业实践	侵蚀
0.17712	0.17946	0.17874	0.17514	0.17143
无效防灾	排水系统	海岸脆弱性	滑坡	流域
0.17597	0.17044	0.17029	0.17664	0.17464
基础设施恶化	人口得分	湿地损失	规划不足	政策因素
0.18140	0.17799	0.17514	0.17325	0.17387

1. 基础设施恶化对洪水的影响最大，海岸脆弱性对洪水的影响最小。
2. 20 个指标与洪水概率的 Spearman 相关系数都在 0.175 左右，说明 20 个指标均与洪水发生概率呈正相关，但是相关性均较弱。

通过计算统计量与洪水概率的 Spearman 相关系数，我们得到各统计量与洪水发生概率的相关性如下：

表 4 统计量与洪水发生概率的 Spearman 相关系数			
统计量	平均值	最小值	最大值
ρ	0.176044	0.170289	0.181399
统计量	25%	50%	75%
ρ	0.173718	0.176304	0.178786

由上表可知，平均值作为统计量，与洪水发生概率的相关性居中，因此选择平均值作为划分指标来进行模型优化。因此选取出检验后 Spearman 相关系数高于平均的指标如下共 10 个：

表 5 精选指标				
基础设施恶化	地形排水	季风强度	大坝质量	河流管理
淤积	人口得分	气候变化	森林砍伐	滑坡

(1) 可能的原因

强烈的季风和降雨可能导致洪水，森林砍伐和城市化造成水土流失增加了洪水的风险，气候变化导致极端天气事件增多，洪水风险上升，基础设施如排水系统和大坝质量问题，减少了防洪能力

(2) 建议与措施

- **提升监测预警：**加强洪水监测和预警系统。
- **合理规划土地：**避免在洪水易发区进行开发。
- **增加绿化：**提高森林覆盖率，减少水土流失。
- **改善水利设施：**加强河流管理和排水系统建设。
- **公众教育：**提高公众防洪意识和自救能力。
- **制定防洪措施：**包括风险评估和应急计划。
- **跨部门协作：**确保防洪措施得到有效执行。
- **应用科技：**使用现代技术提高洪水预测和管理效率。

六、问题 2 模型的建立与求解

6.1 低，中，高风险聚类

6.1.1.K-Means++聚类过程

K-Means++是 K-Means 聚类算法的一种改进版本，它通过智能地选择初始聚类中心来提高 K-Means 的性能(李航 2022：216-227)。K-Means++的目标是更好地选择初始聚类中心，以减少算法的迭代次数，提高聚类的质量。具体步骤如下：

1. **选择第一个聚类中心：**随机选择一个数据点作为第一个聚类中心。
2. **选择后续聚类中心：**对于每个数据点，计算它与已选择的聚类中心之间的最短距离 D(x)（即与最近的聚类中心之间的距离）。每个数据点作为下一个聚类中心的概率为:

$$\mathrm{p(x)} = \frac{D(x)^2}{\sum_{x \in X} D(x)^2}$$

其中 x 代表任意一个数据点，X 表示数据集。这样保证了距离更远的数据点更有可能被选为下一个聚类中心，以确保新的聚类中心较好地覆盖数据分布。

3. **完成聚类中心的选择：**重复步骤 2 直到选择足够数量的聚类中心（一般为 k 个，我们称将数据分成了 k 个簇）。
4. **计算每个数据点到聚类中心的距离：**对于每个数据点，计算它与每个聚类中心的距离，通常使用欧氏距离或其他距离度量方式。对于数据点与聚类中心的距离由以下公式给出：

$$d(x_i, c_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N}(x_{ik} - c_{jk})^2}$$

其中x_i为第 i 个样本点，c_j为第 j 个聚类中心，x_{ik}是第 i 个样本点的第 k 个分量，c_{jk}是第 j 个聚类中心的第 k 个分量。

5. **分配数据点到最近的聚类中心：**将每个数据点分配到距离它最近的聚类中心所属的簇。
6. **更新聚类中心：**重新计算每个簇的中心，即该簇所有数据点的平均值。将该平均值作为新的聚类中心。即新的中心为：

$$c_j' = \frac{1}{\mathrm{N_{X_j}}} \sum_{x_i \in X_j} x_i$$

其中c_j'为新的聚类中心，其中X_j为以c_j为聚类中心的聚类，$\mathrm{N_{X_j}}$为X_j中数据点的个数。

7. **完成聚类：**重复步骤 4，5，6，直到聚类中心不再改变，或达到预定义的停止条件（比如达到最大迭代次数）。
   最终得到每个数据点所属的簇，即完成了 K-Means++聚类。
   使用 Python 进行求解，再用箱型图和直方图进行可视化，得到以下结果：

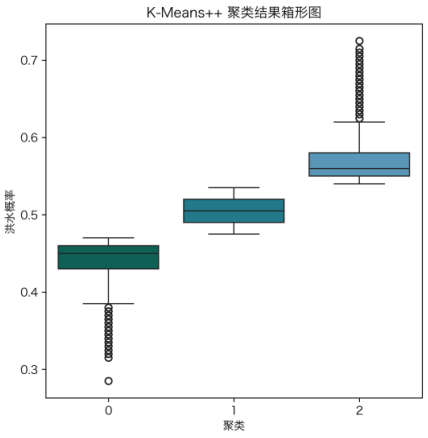


图 5 K-Means++聚类结果（箱型图）

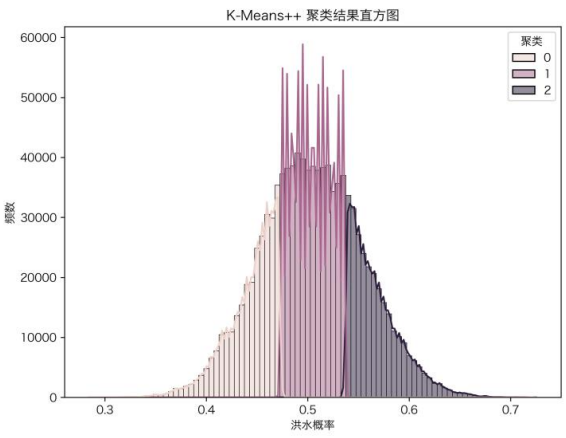


图 6 K-Means++聚类结果（直方图）

从图中不难看出，低，中，高风险的洪水概率是**基本无交错的且大致服从正态分布**，但仍旧需要精确的数据来证明聚类结果是有效的。

基于聚类结果对总表进行分表，并合并统计区间分布情况如下：

表 6 低，中，高风险洪水概率分布情况

	样本数	平均值	最小值	25%	75%	最大值
低风险	282202	0.4423	0.285	0.43	0.46	0.47
中风险	492938	0.5046	0.475	0.49	0.52	0.535
高风险	273435	0.5684	0.54	0.55	0.58	0.725

从表中可见，不同风险类别情况下，三个风险等级对应已有区间分别为[0.285,0.47]，[0.475,0.535]，[0.54,0.725]，因此我们**判断 K-Means++完整将数据聚类到了三个无交错簇中。**

至此，我们将所有 train.csv 中所有数据根据洪水发生的概率划分成了低，中，高风险三个类别。

但是对于风险评级的划分，我们希望得到[0,1]区间上连续的三个子区间，而事实上得到的三个区间分别为[0.285,0.47]，[0.475,0.535]，[0.54,0.725]，显然这些区间是存在空缺的，为了**填补空缺**实现一个完整的回归区间划分使其较好地满足回归+三分类模型需求，下面基于对 train.csv 中洪水概率的统计分析，使用**逻辑回归对其进行区间填补。**

6. 1. 2 逻辑回归填补区间

逻辑回归,即对数概率回归,是一种线性模型,是一种用于分类问题的算法(李航 2022：77-93)。通过学习特征与类别之间的关系，逻辑回归可以预测新数据点属于哪个类别，输出类别的概率，其过程如下：

1. **收集数据**：收集具有标签的训练数据集，每个数据点包括特征值和类别标签。
2. **特征工程**：对数据进行特征提取和选择，包括数据清洗、特征缩放、特征选择等操作。
3. **定义预测函数**：假设我们的模型可以用如下形式表达：

$$h_\theta(x) = g(\theta^T x)$$

其中[g(z)]是 Sigmoid 函数，定义为：

$$g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

[g(z)]的导数满足$[g'(z) = g(z)(1-g(z))]$。

则最终预测函数表达式为：

$$h_\theta(x) = \frac{1}{1+e^{-\theta^T x}}$$

其中$\theta^T x = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_n x_n$，$\theta_{\mathrm{i}}(\mathrm{i} = 1,2,3,\ldots,\mathrm{n})$为$x_{\mathrm{i}}$对应权重,需要后续过程计算得出。

最后样本为正样本的概率为$h_\theta(x)$，样本为负样本的概率为$1 - h_\theta(x)$。

4. **定义损失函数**：我们使用交叉熵损失函数来度量模型预测值与真实标签之间的误差（由于篇幅原因，我们不给出推导过程）：

$$J(\theta) = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[\,y^{(i)}\,log(\,h_\theta(x^{(i)})) + (1-y^{(i)})\,log(\,1-h_\theta(x^{(i)}))]$$

5. **最小化损失函数**：通过梯度下降等优化算法，最小化损失函数，得到最佳的参数θ。
6. **预测**：当模型训练完成后，我们可以用训练好的参数对新数据进行分类预测。分类规则为：如果正样本的概率大于负样本的概率，则样本被判定为正样本，否则被判定为负样本，这等价于

$$\frac{h(x)}{1-h(x)} > 1$$

首先将训练集给出的洪水概率作为特征，将聚类出的类别作为分类标签，训练**逻辑回归分类器**，原始的区间[0.2825, 0.7275]微分切片为 1048575 份，为了提升精确度，将其提升 100 倍，即 100×1048575 份，生成一个相对连续的概率区间划分序列，随后将该序列用先前训练出的逻辑回归分类模型进行分类，成功找到三个基本连续的区间[0.282500, 0.472481], [0.472481, 0.537549], [0.537549, 0.727500。因此，得出区间划分的结论为：

$$\begin{cases} \text{低风险区间：}[\mathbf{0}, \mathbf{0.472481}) \\ \text{中风险区间：}[\mathbf{0.472481}, \mathbf{0.537549}) \\ \text{高风险区间：}[\mathbf{0.537549}, \mathbf{1}] \end{cases}$$

至此，**连续的回归数值到离散的类别数值的映射区间构造完成。**

6.3 分析具有高、中、低风险的洪水事件的指标特征

对高、中、低风险的洪水事件进行统计分析以及可视化，得出如下结果（以低风险为例，其余见附表）：

表 7 低风险区的各指标分布情况

	季风强度	地形排水	河流管理	森林砍伐	城市化
平均值	4.489	4.474	4.518	4.514	4.520
最小值	0	0	0	0	0
最大值	16	18	16	16	16
	气候变化	**大坝质量**	**淤积**	**农业实践**	**侵蚀**
平均值	4.511	4.517	4.491	4.518	4.517
最小值	0	0	0	0	0
最大值	17	16	16	16	17
	无效防灾	**排水系统**	**海岸脆弱性**	**滑坡**	**流域**
平均值	4.503	4.532	4.535	4.496	4.491
最小值	0	0	0	0	0
最大值	16	17	17	16	16
	基础设施恶化	**人口得分**	**湿地损失**	**规划不足**	**政策因素**
平均值	4.492	4.490	4.523	4.512	4.513
最小值	0	0	0	0	0
最大值	16	16	16	16	16

从表中可见，低风险情况下的各大指标平均数值差异不大，而该情况在其他两种风险类别中也及其相似，可得出相应结论，即**同类风险程度下各项指标数值分布极其相似**。

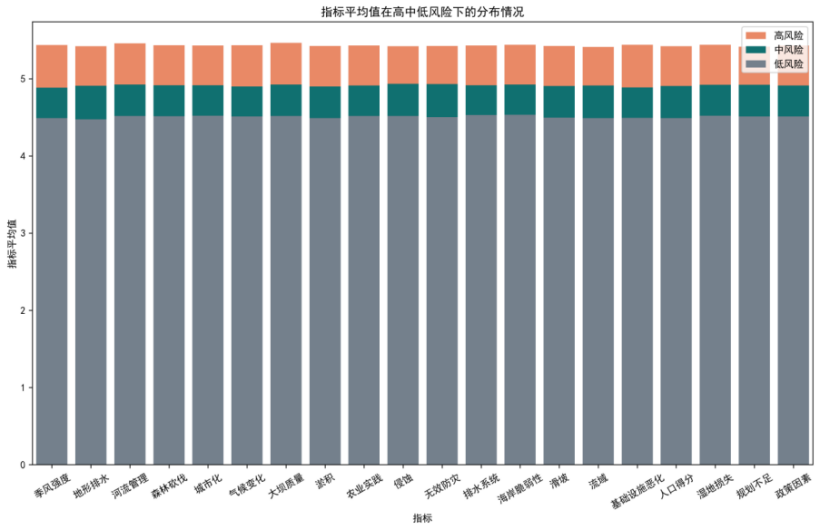


图 7 指标平均值在高中低风险下单分布情况

上图可视化结果印证了同类风险程度下各项指标数值分布极其相似的数据分析结论，接下来我们通过线性回归建立预警评价模型。

6.4 建立发生洪水不同风险的预警评价模型

6.4.1 选取评价指标

为了评估我们最后得到的回归+分类合并模型，我们先引入 **R2 分数**和**三分类准确率**。

- **R2 分数：**也称为确定系数（Coefficient of Determination），是衡量回归模型拟合优度的一个常用指标,其计算公式如下：

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$

它直观地反映了模型预测能力的强弱，并且可以用来解释模型对数据的解释程度（值越大，说明回归效果越好）。

- **三分类准确率(ACC_3):**三分类准确率是指在一个有三个不同类别的分类问题中，模型正确预测的样本比例。通常情况下，三分类准确率可以被定义为模型对所有三个类别中正确预测的样本数目的比例,即：

$$三分类准确率 = \frac{预测正确的样本数}{总样本数}$$

这里，“预测正确的样本数”是指模型在所有预测中正确预测的样本数目，总样本数则是所有样本的数量。显然，值越大，也说明回归效果越好。（后简称 ACC_3）

6.4.2 构建基准模型：线性回归

线性回归是一种用于描述自变量与因变量之间线性关系的统计学方法。其基本思想是通过拟合一条直线（或超平面）来最好地拟合数据点，从而预测因变量的取值。由于该模型原理较为简单，我们选择将其作为基准模型，并借其性质来进一步探索指标数据与洪水概率的深层次关系。

下面详细介绍线性回归的过程和数学原理：

1. **线性关系建模**：线性回归假设因变量 y 与自变量 x 之间存在线性关系，可以用一条直线或超平面表示。数学表达式为

$$y = \omega_0 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_n x_n = \omega^{\mathrm{T}}\mathrm{x}$$

其中$x_1, x_2, \ldots, x_n$为自变量，$\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\mathrm{n}}$为对应权重,$\omega$=$(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\mathrm{n}})$称之为权重向量,x=$(1, x_1, x_2, \ldots, x_n)$称之为特征向量。

2. **最小化损失函数**：通常将均方误差（Mean Squared Error，MSE）作为损失函数，即：

$$L = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \omega^{\mathrm{T}}x_{\mathrm{i}})^2$$

其中y_i为真实值，$\hat{y}_i$为预测值。

线性回归的目标是最小化损失函数，即通过最小化实际值与预测值之间的误差平方和来得到最优参数。采用最小二乘法得到最优参数

$$\omega = (X^T X)^{-1} X^T y$$

其中X为一m ×(n+1)的矩阵，称之为特征矩阵（每一行均为不同样本点的特征向量的矩阵,故 n 指标数，m 为样本数目），y=$(y_1, \mathrm{y}_2, \ldots, y_m)$是由对应样本的应变量构成的向量。

直接利用所有指标进行线性回归模型训练，通过该模型得到各个指标特征的权重如下：

表 8 各指标权重（$\omega_0 = -0.0534$）

指标	季风强度	地形排水	河流管理	森林砍伐	城市化
权重	0.0056	0.0056	0.0057	0.0057	0.0057
指标	气候变化	大坝质量	淤积	农业实践	侵蚀
权重	0.0057	0.0057	0.0056	0.0056	0.0056
指标	无效防灾	排水系统	海岸脆弱性	滑坡	流域
权重	0.0056	0.0056	0.0057	0.0056	0.0056
指标	基础设施恶化	人口得分	湿地损失	规划不足	政策因素
权重	0.0056	0.0057	0.0056	0.0056	0.0056

可见，各指标权重差距并不大，因此需要对模型性能进行进一步评估

线性回归模型得出的基准结果如下：

表 9 线性回归模型（Org-20）

R2 分数	**ACC_3**
0.84444	0.76743

其中 Org-20 表示选用原始 20 指标。

可见，基本的线性回归模型便可以获得较为优秀的结果，由此**推断指标数据与洪水概率之间的线性相关性是较高**的，至此我们得到了**洪水概率预测的基准模型**，接下来我们选取关键指标用以进一步建立预警评价模型。

6.4.3 选取关键指标

在上述线性回归模型可以发现，指标数据未经特殊处理的情况下依旧与洪水概率有着较强的线性相关性，因此，为了构造关键引导变量，将所有指标之和求出，并与其相应洪水概率可视化如下：

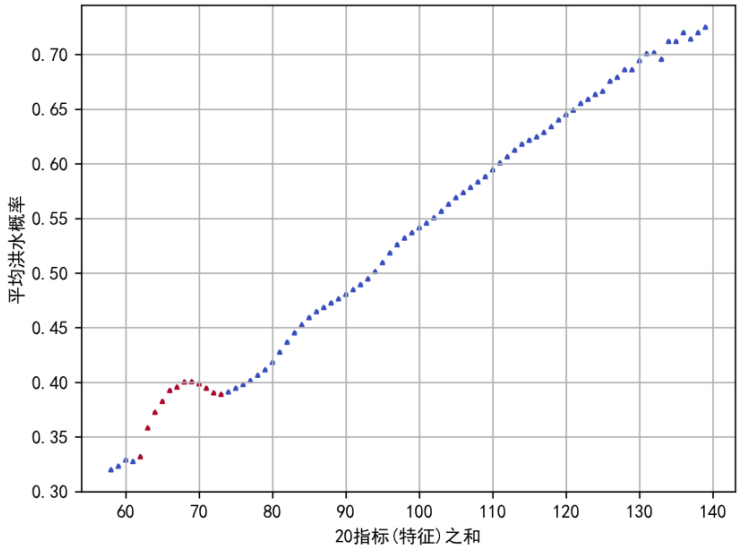


图 8 指标和与平均洪水概率描述

可以观察到，洪水发生概率与指标和基本呈正相关。因此我们选用指标和作为关键指标，引导模型训练。同时，观察到线性关系中存在特殊值（红色部分）。为了保证模型的低灵敏度（强泛化性、强鲁棒性），将特殊值作为数据噪声放入指标考虑范围内。

同时，由于指标维度上数据参差不齐，为了减少在特定维度上的指标数值差异，在样本维度上对所有指标进行降序排序以减少指标维度上的差异性，构造排序指标。

在这一步骤，我们通过对数据的可视化探索选取**指标和**作为一个关键指标，并且将季风强度、地形排水等指标在样本维度上从小到大排序，构造**排序指标**，作为另一个关键指标。

6.4.4 CatBoost 进一步建立模型

为了更好地介绍 CatBoost 之前我们先简单地讲解几个概念：

- **决策树：**决策树是一个预测模型，它代表的是对象属性与对象值之间的一种映射关系(李航 2022：57-75)。树中每个节点表示某个对象，而每个分叉路径则代表某个可能的属性值，而每个叶节点则对应从根节点到该叶节点所经历的路径所表示的对象的值。如图所示就是一个决策树。

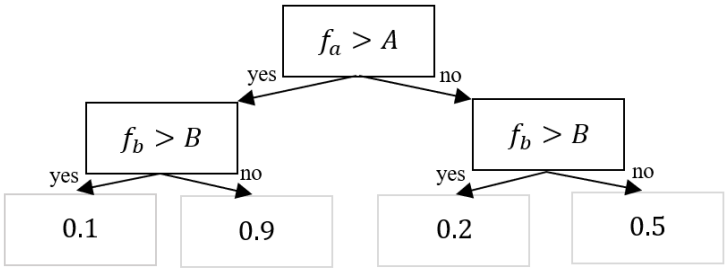


图 9 朴素决策树示意图

决策树的结果可以表示为：

$$\hat{y}(x) = \sum_{m=1}^{M} C_m \, I(x \in R_m)$$

其中$\hat{y}(x)$是输入样本 x 的预测值，M 为决策树的叶节点数量，R_m是决策树第 m 个叶节点的区域，C_m是第 m 个叶节点的类别输出，I是指示函数，表示如果 x 属于R_m则为 1，否则为 0。

- **集成学习方法：**集成学习方法是一种机器学习策略，旨在通过组合多个学习器的预测结果来改善整体的预测性能(李航 2022：131-146)。它可以通过结合多个模型的优点，来提高泛化能力和预测准确性，特别是在处理复杂问题或数据集中存在噪声的情况下表现良好。常见的集成学习方法有 Bagging（Bootstrap Aggregating）， Boosting，Stacking 等等，后文使用的 CatBoost 就是一种通过串行训练多个弱学习器，每个学习器专注于修正前序学习器的错误，最终构建一个强大的集成模型的集成学习方法。
- **梯度提升树：**梯度提升树(李航 2022：131-146)是一种强大的集成学习方法，通过结合多棵决策树来提升预测性能。它基于逐步优化损失函数的梯度，每一棵树都专注于拟合前一棵树的残差，最终通过组合多个模型来减少预测误差，广泛应用于回归和分类任务中，特别适合处理复杂的非线性关系和高维数据。

根据以上概念我们可以得到 CatBoost 的基本原理：

CatBoost [1]是一种基于对称决策树（oblivious trees）为基学习器（弱学习器）实现的参数较少、支持类别型变量和高准确性的 GBDT（Gradient Boosting Decision Tree）框架。其过程如下：

1. **定义模型：**CatBoost 回归模型可以表示为一个集成模型，由多个决策树组成。假设我们有 K 棵树，模型可以表示为：

$$F(x) = \sum_{k=1}^{K} f_k \, (x)$$

其中，x是输入特征向量，$f_k(x)$是第 k 棵树的预测函数。

2. **定义损失函数：**为了训练模型，我们需要定义一个损失函数来衡量模型的预测误差。通常在回归任务中，我们使用均方误差（MSE）作为损失函数：

$$L = MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\, y_i - F(x_i))^2$$

其中，N 是训练样本的数量，y_i是第 i 个样本的真实标签。

3. **训练过程:**CatBoost 使用梯度提升算法来逐步优化模型。在每一步中，根据当前模型的残差计算新的决策树f_k，使得损失函数最小化。每棵树的建立过程可以表示为：

$$f_k = arg \ \min_{f} \sum_{i=1}^{N} L \, (y_i, F_{k-1}(x_i) + f(x_i))$$

这里$F_{k-1}(x_i)$ 是前 k-1 棵树的累积预测，L 是损失函数。

4. **正则化**：CatBoost 在训练过程中还包括一些正则化技术，如树的深度限制、学习率控制等，以防止过拟合并提高泛化能力。
5. **预测**：训练完成后，通过将所有树的预测累加来得到最终的预测结果：

$$\hat{y} = F(x) = \sum_{k=1}^{K} f_k(x)$$

这就是 CatBoost 回归模型的基本数学过程：通过梯度提升的方式，逐步构建多棵决策树，并结合它们的预测来最小化损失函数，从而得到最优的回归预测模型。

最终，我们得到的 CatBoost 回归模型效果如下：

表 10 CatBoost 回归模型（Sorted-20，Sum-1）

R2 分数	ACC_3
0.86923	0.76290

其中 Sorted-20 代表升序排列的原始 20 指标，Sum-1 代表 1 个指标之和。

可见，CatBoost 在经过严谨分析的特征工程之后在**回归任务上优于基准模型**，三分类任务准确度与基准模型在伯仲之间。

6.4.5 K 折交叉灵敏性验证

K 折交叉验证（K-fold Cross-Validation）是一种常用的交叉验证技术，用于评估模型在数据集上的性能和泛化能力。它将数据集分成 K 个子集，每个子集称为一个折（fold）。K 折交叉验证的过程如下：

1. **数据集划分：**
- 将数据集分成 K 个大致相等的部分（折）。
- 每个折依次作为验证集，其余 K-1 个折作为训练集。

2. **交叉验证过程：**
- 第一轮：将第一折作为验证集，其余 K-1 折作为训练集，训练模型并在第一折上进行评估。
- 第二轮：将第二折作为验证集，其余 K-1 折作为训练集，训练模型并在第二折上进行评估。
- 依此类推，直到第 K 轮。

3. **评估指标**：每轮验证后得到一个评估指标（比如准确率、精确率、召回率等）。最终的模型性能评估通常是五轮验证结果的平均值，这样可以减少因为特定数据分割而引入的偏差。

此处我们采用 **5 折交叉验证**，得到的结果如下：

表 11 CatBoost 回归模型 5 折交叉验证

	1 折	2 折	3 折	4 折	5 折	均值
R2 分数	0.87019	0.86971	0.86849	0.86885	0.86892	0.86923
ACC_3	0.76247	0.76296	0.76290	0.76295	0.76324	0.76290

可见，模型在 5 折交叉验证的训练过程中保持了在回归与分类问题上的稳定且优异的性能，证明了其**低灵敏度、高泛化性、高鲁棒性**

七、问题 3 模型的建立与求解

7.1 利用精选指标优化模型（基于问题 1 的分析）

同时，加入指标和作为关键引导指标，组成全新的 11 维特征，训练 CatBoost 回归模型，性能较基准模型有所提升，而相比排序指标+指标和的模型部分伯仲，训练结果如下：

表 12 CatBoost 回归模型（Selected-10，Sum-1）

R2 分数	ACC_3
0.86923	0.76290

其中，Selected-10 代表精选高相关性指标 10 个，Sum-1 代表使用 1 个指标和作为关键指标。

可见，CatBoost(Selected-10，Sum-1)模型与 CatBoost(Sorted-20，Sum-1)的性能基本相当，且均在 R2 分数，即回归任务上优于普通线性回归的性能。

7.2 五指标模型优化

为了在仅选用 5 个关键指标作为特征的限制下优化问题 2 中所建立的 CatBoost 回归模型，本文通过借助划分指标来进行主成分分析，将 20 维指标降维至 **4 维关键指标**，结合**指标和**组成 **5 个关键指标**，实现求解得到**最优的 CatBoost 回归模型**。

7.2.1 主成分分析（PCA）

- **PCA 简介**

主成分分析（principal component analysis）是一种通过正交变换，将一系列可能线性相关的变量，转换成一组线性不相关的新变量的数学降维方法。而这些不相关变量也称作主成分(李航 2022：250-269)。主成分分析在简化运算、去除噪音、数据可视化等方面起到了重要作用。

PCA 算法的大致流程如下：

我们将 m 个 n 维数据记作矩阵 $X_{n\times m}=\left[\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_m\right]$

1. 对数据去中心化：

$$X = X - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\vec{x}_i$$

2. 计算协方差矩阵 C：

$$C = \frac{1}{m}XX^T$$

3. 求解 C 的特征值矩阵（其中特征值按降序排列）,取前 k 列，记作矩阵:

$$P = P_{\mathrm{n}\times k}$$

4. 将原始数据对进行投影，得到降维后数据，即：

$$Y_{\mathrm{k}\times m} = P_{\mathrm{n}\times k}^{T}X_{n\times m}$$

- **应用 PCA 提取关键特征**

PCA 降维提取关键特征的步骤如下：

1. **数据选取：**选取所有 20 维指标作为特征维度，洪水概率为目标维度
2. **特征标准化：**PCA 对数据的尺度敏感，不同尺度的数据可能会导致主成分分析的结果不准确，因此对其进行标准化处理
3. **特征降维：**选取降维比例为 20%，将 20 维特征降维至 4 维，作为关键特征
4. **PCA 可视化：**展示主成分 1、2 的分布情况，并根据目标变量对数据点进

行了颜色编码，以显示不同类别的数据分布。

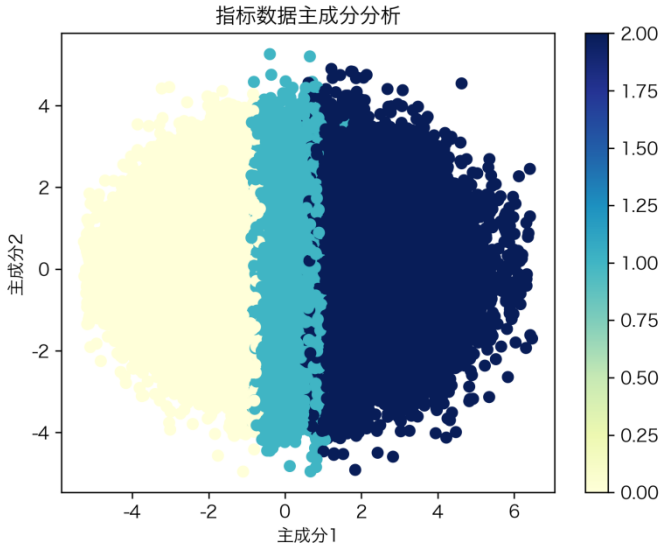


图 10 指标数据主成分分析结果

可见，PCA 数据降维实现了较好的**特征分解**与**关键指标提取**工作

7.2.2 最优 CatBoost 回归模型

基于 PCA 降维后的 4 个主成分，辅以指标和组成 5 个关键指标，用以训练 CatBoost 回归模型，并实现了远超先前所有基准、优化模型的效果，实现了 SOTA（State Of The Art）的最优模型：

表 13 SOTA CatBoost 回归模型（PCA-4，Sum-1）

R2 分数	ACC_3
0.97369	**0.90594**

其中，PCA-4 代表 PCA 压缩指标到 4 维，Sum-1 代表使用一个指标和作为关键指标，SOTA 即 State Of The Art 其代表最优模型。

可见，**PCA 降维处理后的数据结合指标和作为关键指标是极佳的特征选取与融合，实现了精妙的特征工程，使得模型性能大幅提升。**

具体模型优化效果及其与基准模型的对比如下表所示：

表 14 洪水概率预测回归模型

模型	R2 分数	ACC_3
线性回归(Org-20)	0.84444	0.76743
XGBoost(Org-20)	0.80975	0.74846
CatBoost(Org-20)	0.84634	0.76736
CatBoost(Sorted-20,Sum-1)	0.86923	0.76290
CatBoost(Selected-10,Sum-1)	0.86691	0.76281
SOTA **CatBoost(PCA-4,Sum-1)**	**0.97369**	**0.90594**

由此可清晰看到本文对模型优化的进行过程及特征工程带来的极佳优化效果。

八、问题 4 模型的建立与求解

基于问题 2 选取的回归模型 CatBoost，加以问题 3 对指标进行的关键指标选取，实现了最优的回归模型，并该模型与特征工程应用于 test.csv 数据，并将预

测结果填写进入 submit.csv 中。

按照问题 1 中的数据分析结果，测试集的频数分布直方图与训练集基本相同，而训练集的洪水概率的分布情况基本符合正态分布，**因此可以假设测试集的预测洪水概率分布情况也应基本尽量符合正态分布**。

对预测结果的概率密度直方图可视化如下：

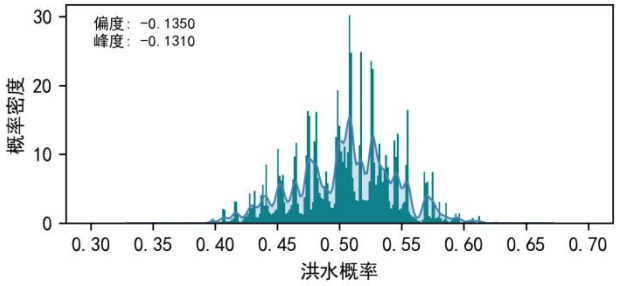


图 11 SOTA CatBoost（PCA-4，Sum-1）预测洪水发生概率统计直方图

该预测**结果分布情况没有明显的偏向性，基本符合正态分布**，对比其他性能较弱的两个 CatBoost 回归模型的预测结果概率分布直方图如下：

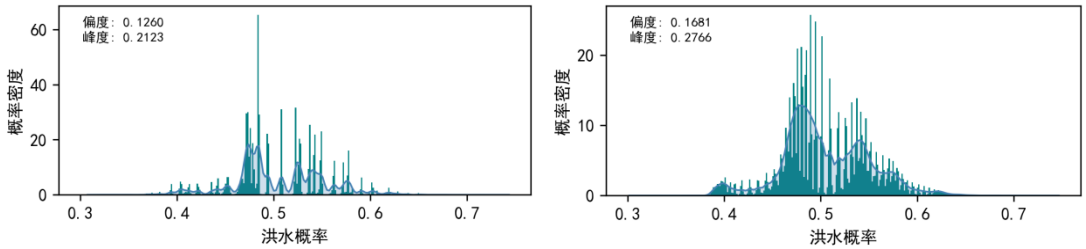


图 12 CatBoost[(Selected-10,Sum-1)，(Sorted-20,Sum-1)]预测洪水发生概率统计直方图

性能较弱的两个模型有着**明显的预测偏向性，并不符合正态分布**，可见，性能最优预测模型的预测结果是较为可信的，这也验证了该模型的鲁棒性。

对最优模型预测结果按正态分布随机采样 1000 条数据，可视化为折线图如下：

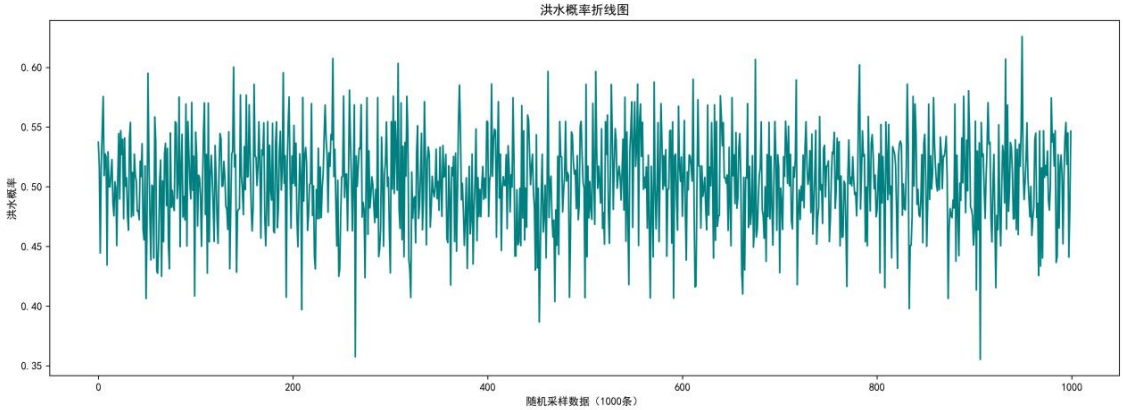


图 13 SOTA CatBoost（PCA-4，Sum-1）随机采样洪水折线图

可见数据基本在 0.5 周围上下浮动，异常值较少，并不影响整体数据分布情况。

九、模型的评价与推广

9.1 模型评价

(1) 优势

1. 量化数据有效：构建过程引入多种统计量对数据进行定量分析以选取建模方向

2. 数据分析严谨：利用 Spearman 相关系数，量化了各指标与洪水概率之间的相关性，并进行了假设检验，确认了模型特征选择的合理性。

3. 特种工程合理有效：经过对数据逐步地细致分析，最终得出了最优的特征处理方式，实现了性能极佳的模型。

4. 性能指标选取合适：使用了 R^2 分数和三分类准确率（ACC_3）作为模型性能的评估标准，通过这些指标，对不同模型的性能进行了横向比较。

5. 验证方法可靠严谨：采用 K 折交叉验证方法，验证了模型的稳定性和泛化能力，确保模型在未见数据上也能保持良好性能。

6. 可视化多样：通过直方图、折线图等可视化手段，直观展示了模型预测结果的分布情况，进一步分析了预测结果的正态性。

(2) 劣势

1. 无法处理时序数据：由于给定数据的限制，无法在时序上进行深入建模，这会造成模型实用性受到限制，因为现实中很多数据是包含强时序关系的。

2. 可识别处理的指标特征太少：由于给定数据的限制，进行更高特征维度的建模工作，这可能会影响实际情况下模型的学习表征的能力。

9.2 模型推广

基于上述评估结果，我们认为所构建的模型具有较高的实用价值和推广潜力。以下是模型推广的几个方向：

1. 数据集扩展：将模型应用于更广泛地区的洪水灾害数据，以验证模型在不同地理和气候条件下的适用性。

2. 实时预测系统：结合实时气象和水文数据，开发实时洪水灾害预测系统，为防洪减灾提供决策支持。

3. 政策制定支持：模型结果可为政府和相关部门制定防洪策略和应急响应计划提供科学依据。

4. 公众教育与预警：利用模型预测结果，开发公众洪水灾害预警应用程序，提高公众的防灾意识和应对能力。

十、参考文献

[1] Prokhorenkova L, Gusev G, Vorobev A, et al. CatBoost: unbiased boosting with categorical features[J]. Advances in neural information processing systems, 2018, 31.
[2] 李航. 《机器学习方法》. 北京: 清华大学出版社, 2022: 57-75, 77-93, 131-146, 216-227, 250-269.

选题	2024 年第十四届 APMCM 亚太地区大学生数学建模竞赛（中文赛项）	参赛编号
B		apmcm24102462

洪水灾害预测模型的设计与分析

摘要

洪水作为常见且破坏力极强的自然灾害，不仅由自然因素驱动，人为活动也极大地影响其频率和严重程度。本文从不同指标特征分析视角出发，根据机器学习算法建立不同等级预警评价模型、洪水发生概率预测模型，实现对洪水发生的准确预测与分析。

针对问题 1，建立决策树回归模型与 XGBoost 回归模型，以洪水发生概率为结果变量与 20 个指标（连续变量）进行关联性分析；为确保得出的关键指标在不同模型中均表现显著，选择结合两个模型的结果得出最终预测并列举出具有强关联性与弱关联性的两组指标；结合实际因素分析指标相关程度密切的可能原因，并针对洪水的提前预防提出了合理的建议和措施。

针对问题 2，首先通过肘部法则（Elbow Method）得到最优簇数结果为 3，验证了洪水高、中、低三个等级事件分类的合理性和科学性；然后通过 K-means 聚类分析方法（K=3）成功将洪水发生概率数据分类；利用随机森林回归模型建立了洪水预警评价模型，将聚类成功完成后的三类数据分三次输入至模型中，得出最合适的关联指标及其权重值。最后，根据得出的数据针对模型灵敏度进行分析，为后续进一步的特征分析、概率预测等提供了可靠依据。

针对问题 3，选择多层感知机（MLP）算法建立洪水发生概率预测模型，基于问题 1 的分析结果将具有强关联性的指标作为预测模型所需数据并进行预处理确保数据的完整性和一致性；通过数据准备、模型训练以及模型推理三个阶段成功建立并得到了具有高拟合度和稳定性的预测模型；基于特征重要性分析选定 5 个关键指标，在原模型的基础上采用调整网络结构、正则化技术、网格搜索调整学习率的方式进行模型优化，成功提高了模型拟合度，并且结果具有良好的可解释性与合理性。

针对问题 4，基于问题 3 中建立的预测模型对附件 test.csv 所有事件发生洪水的概率进行预测并将结果填入 sumbit.csv 中（具体结果见支撑材料）；将预测结果通过频率分布直方图和折线图进行可视化，通过直观观察、Shapiro-Wilk 统计的方法验证了模型预测结果符合正态分布特性，具有较高的泛化能力和实用性。

综上所述，洪水灾害预测模型的设计与建立提高了洪水发生概率的预测精度，为防洪预警和应对提供了科学依据，并且对洪水灾害的预防和管理具有重要的现实意义。

关键词：决策树　XGBoost　随机森林　K-means　多层感知机　Shapiro-Wilk

目录

一、问题重述 1
1.1 问题背景 1
1.2 问题要求 1
二、问题分析 1
2.1 总体分析 1
2.2 问题 1 的分析 2
2.3 问题 2 的分析 2
2.4 问题 3 的分析 2
2.5 问题 4 的分析 2
三、符号说明 3
四、问题 1 模型的建立与求解 3
4.1 洪水发生概率与不同指标的相关程度分析 3
4.1.1 基于决策树回归模型的建立与求解 3
4.1.2 基于 XGBoost 回归模型的建立与求解 5
4.1.3 针对决策树回归模型与 XGBoost 回归模型的综合分析 7
4.2 指标相关性的原因分析 8
4.3 提前预防的合理建议与措施 8
五、问题 2 模型的建立与求解 8
5.1 不同等级洪水事件的分类及分析 8
5.2 随机森林回归预警评价模型的建立与求解 9
六、问题 3 模型的建立与求解 11
6.1 数据预处理 11
6.2 基于神经网络的洪水发生概率预测模型建立与求解 12
6.2.1 单层感知机模型 12
6.2.2 MLP 模型的建立与求解 12
6.2.3 MLP 模型结果分析 14
6.3 关键指标下的模型调整与优化 15
七、问题 4 的求解 17
7.1 洪水发生概率的数据预测 17
7.2 预测结果的可视化与分析 17
八、模型的评价及推广 18
参考文献 19
附 录 20

一、问题重述

1.1 问题背景

洪水作为最常见、破坏力最强的自然灾害之一，常由暴雨、急剧融冰化雪、风暴潮等自然因素引起，不仅威胁到人类生命安全，还对农业、基础设施、生态环境等造成严重破坏。然而，洪水的发生不仅由自然因素驱动，人为活动也极大地影响其频率和严重程度，例如，迅猛的人口增长、耕地扩展、围湖造田以及乱砍滥伐等活动都会改变地表状态和汇流条件，从而加剧洪水灾害的发生和影响[1]。

因此，识别影响洪水发生的关键因素并准确预测洪水发生的概率，不仅能提高防洪预警的准确性和及时性，同时有效减少了洪水灾害带来的损失。

1.2 问题要求

问题设置循序渐进，全面系统地从数据分析到模型构建，再到实际预测和结果分析，逐步提高对洪水灾害的预测能力。每个问题既相互独立，又紧密关联，共同服务于整体目标——如何在复杂的自然因素和人为因素影响下，对洪水的发生概率做出准确预测。

问题 1 首先要求根据附件 train.csv 中提供的数据，分析并可视化影响洪水发生概率的 20 个不同指标，确定并分别列举出每个指标与洪水发生的相关性强弱，通过不同指标因素推断可能的原因，针对洪水的提前预防提出合理的建议和措施。

问题 2 首先要求将附件 train.csv 中的洪水发生概率进行分类，给出高、中、低三种不同风险的洪水事件更具关联性的指标特征，在此基础上，选择合适的指标并计算权重值，建立不同风险等级的洪水预警评价模型，并对模型进行灵敏度评估。

问题 3 要求利用问题 1 中指标分析结果建立洪水发生概率的预测模型，从 20 个指标中选取合适的指标预测洪水发生的概率并验证模型的准确性；在此基础上，探究选择 5 个指标时如何调整并改进预测模型。

问题 4 要求利用问题 3 中建立的洪水发生概率预测模型，对附件 test.csv 中所有事件发生洪水的概率进行预测，并将预测结果填入附件 submit.csv 中；绘制发生洪水概率的直方图和折线图并验证预测结果的分布是否符合正态分布。

二、问题分析

2.1 总体分析

本题是一个关于洪水发生事件指标数据分析与概率预测的问题。

分析目的上，需要对附件数据进行分析，确定 20 个不同指标与洪水发生概率的关联程度，对影响洪水发生的因素与概率做出初步判断。因此，本题需要达成三个主要任务：其一，根据洪水发生的概率对洪水事件进行分类，确定高、中、低三种风险事件不同的指标特征。通过计算不同指标的权重建立不同风险等级的洪水预警评价模型，并对模型进行灵敏度分析；其二，基于前述的分析结果，建立洪水发生概率的预测模型并选取合适的指标预测洪水发生的概率。在仅使用 5 个关键指标的情况下，对预测模型调整和改进；其三，对附件 test.csv 中所有事件发生洪水的概率进行预测，并绘制出概率直方图和折线图以验证结果是否服从正态分布，确保模型的泛化能力和稳健性。

数据特征上，关于洪水灾害的数据具有多维度、异质性强、噪声较多等特征。因此，本题数据相对复杂特殊，需要对数据进行预处理，以提高模型的准确性和稳定性。

模型选择上，由于洪水数据样本量大，并考虑到问题的背景、目的等与实际应用密

切相关，所选模型应当追求合理性、实际性，以便于结果的解读和应用。

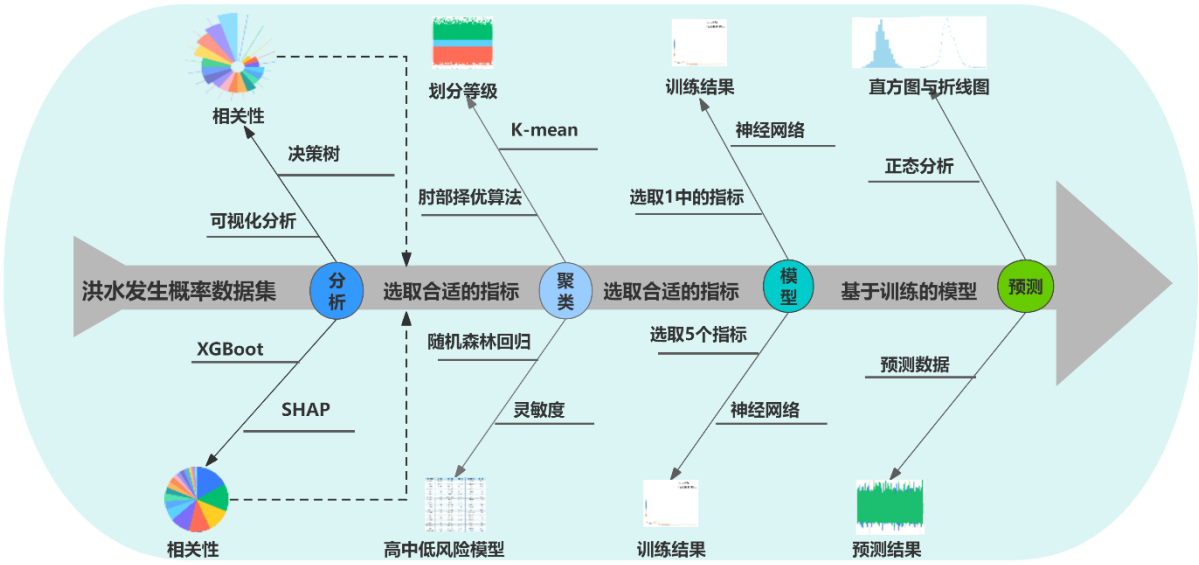


图 1 总体分析示意图

2.2 问题 1 的分析

问题 1 的核心目的是在于确定哪些指标与洪水事件的发生密切相关，为后续预测洪水发生概率提供依据。通过对附件 train.csv 中的数据进行分析和可视化，得出 20 个指标中的关键影响因素。但是，由于数据中可能存在噪声、异常值等，传统的简单模型已不足以揭示这些关系。因此，可以采用机器学习方法来分析指标与洪水发生的关系趋势，并用统计量或可视化工具来刻画这些趋势。基于这些分析结果，提出合理的洪水预防建议和措施，以降低洪水带来的风险和损失。

2.3 问题 2 的分析

问题 2 的核心目的在于根据洪水发生的概率通过聚类算法（K-means 聚类、层次聚类等）将附件 train.csv 中的洪水事件分为三类，并利用特征重要性分析或相关性分析的方法指明不同等级洪水事件的密切相关指标。基于选定的关键指标和其权重建立不同风险等级的预警评价模型并进行模型的灵敏度分析，确定对预测结果影响最大的指标，并根据分析结果调整模型结构和参数，以提高模型的稳定性和可靠性。

2.4 问题 3 的分析

问题 3 的核心目的在于选择合适的机器学习方法建立洪水发生概率的预测模型。在 20 个指标中选取合适的指标完成模型准确性的验证及性能的评估，并基于特征重要性分析选定 5 个关键指标，在关键指标下优化和改进模型，确保在减少特征数量的情况下，模型仍能保持较高的预测性能。

2.5 问题 4 的分析

问题 4 的核心目的在于进一步验证模型的有效性，其一预测附件 test.csv 中的所有事件发生洪水的概率，评估模型在未见数据上的表现，确保模型不仅在训练数据上有效，在新的数据环境中同样具有预测能力；其二绘制概率直方图和折线图，检验结果是否服从正态分布以反映模型预测结果的合理性和数据的自然变异性。

三、符号说明

符号	含义
y_i	均方误差（MSE）的实际值，$i=1,2$
$\hat{y}_i$	均方误差（MSE）的预测值，$i=1,2$
n_i	均方误差（MSE）子节点的样本数量，$i=1,2$
Ω	正则化项
γ、λ	正则化参数
η	学习率
w	权重
f_j	回归模型中的特征
x_i	欧氏距离中的数据点
σ	激活函数
β_i	动量项的衰减系数，$i=1,2$

四、问题 1 模型的建立与求解

4.1 洪水发生概率与不同指标的相关程度分析

4.1.1 基于决策树回归模型的建立与求解

洪水发生概率及 20 个不同指标均为连续变量，考虑以洪水发生概率为结果变量，与各个指标进行回归分析。

首先，利用决策树回归模型评估每个指标对洪水发生概率的关联程度，通过构建树形结构进行分割以实现预测目标变量。决策树[2]是一种基于树形结构的监督学习方法，用于处理分类和回归问题，如图 2 所示。它通过递归地将数据集划分为更小的子集，形成一棵树状结构。每个内部节点表示一个特征，每个分支表示该特征的一个可能取值，每个叶节点表示一个类标签或一个连续值。根据特征的取值从根节点开始逐步向下遍历树，最终达到叶节点以确定数据的分类或预测值。针对问题 1，由于洪水发生概率存在多个特征影响，因此，选用决策树回归建立模型。

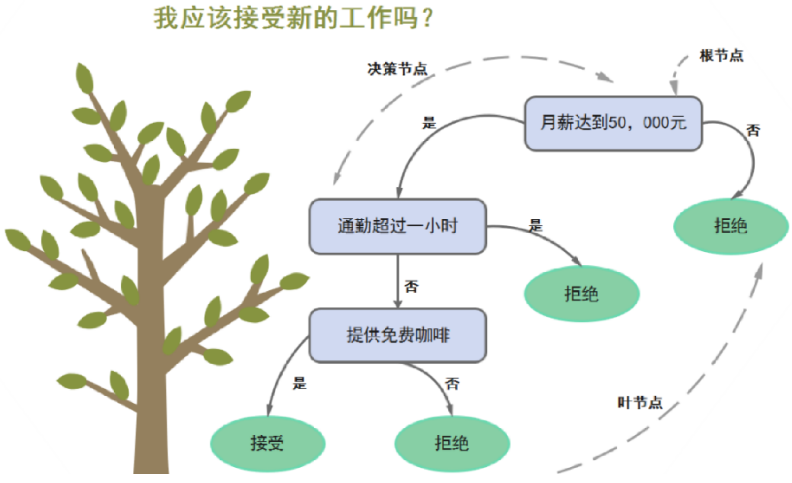


图 2 决策树回归模型

建立决策树回归模型的过程如下：

构建树形结构：决策树由根节点、内部节点和叶节点组成。根节点包含整个数据集，每个内部节点根据某个特征进行分裂，叶节点包含最终的预测值。模型不断分裂节点，逐步缩小数据集的范围，以提高预测的精确度。

初始化：从根节点开始，初始化整个数据集作为根节点的数据。根节点的预测值设为整个数据集的洪水发生概率的平均值，以此作为初始预测值。值得注意的是，平均值的设定有助于提供一个合理的基线预测，使得初始误差较小，从而提高模型的收敛速度和稳定性。

递归分裂：在每个节点，选择最佳的特征和分裂点，根据分裂准则将数据集分成两个子节点。其中，分裂准则采用均方误差（MSE）或基尼指数。

MSE 具体公式如下所示：

$$MSE = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(y_i - \hat{y}_1)^2 + \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \hat{y}_2)^2 \tag{1}$$

其中，n_1和n_2分别是两个子节点的样本数量，y_i是实际值，$\hat{y}_1$和$\hat{y}_2$是两个子节点的预测值。选择使得 MSE 最小的特征和分裂点进行分裂，从而优化洪水发生概率的预测。

基尼指数具体公式如下所示：

$$Gini(D) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \tag{2}$$

其中，p_i是样本点属于第i的概率。基尼指数衡量的是节点的不纯度，基尼指数越小，节点纯度越高。

选择森林覆盖率作为分裂特征，通过计算分裂后的 MSE，确定最佳的分裂点，如公式（3）所示：

$$\text{最佳分裂点} = \underset{s}{argmin}\left(MSE = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(y_i - \hat{y}_1)^2 + \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \hat{y}_2)^2\right) \tag{3}$$

其中，s表示分裂点。

树的增长：决策树通过递归分裂节点生长，每次分裂都会根据当前节点的数据集选择最佳的特征和分裂点，直到满足停止条件。停止条件可以是树的最大深度、叶节点的最小样本数或 MSE 的阈值。例如，当某个特征（如侵蚀等）对洪水发生概率有显著影响时，模型会优先选择该特征进行分裂，以提高预测准确性。

训练完成，输入特征变量进行预测。首先，遍历树形结构，从根节点开始，根据输入数据的特征值，沿着决策树的分裂路径向下遍历，直到到达叶节点。当输入一个新的样本，该样本具有淤积、城市化水平、地形排水特征等，模型将沿着决策树的路径进行分裂，最终到达对应的叶节点。最终，叶节点的值即为输入数据的预测值。

最终，利用 cross-validation 评估模型的性能，防止过拟合；通过特征重要性分析（公式（4））识别对洪水发生概率影响指标排序。得到最终结果如图 3 所示。

$$Importance(f_j) = \sum_{t=1}^{T} I(f_j, t) \tag{4}$$

其中，$Importance(f_j)$表示特征f_j在所有树中的重要性，$I(f_j, t)$表示特征f_j在第t棵树中的重要性。通过分析特征重要性，识别出不同指标对洪水发生概率的预测关联程度。

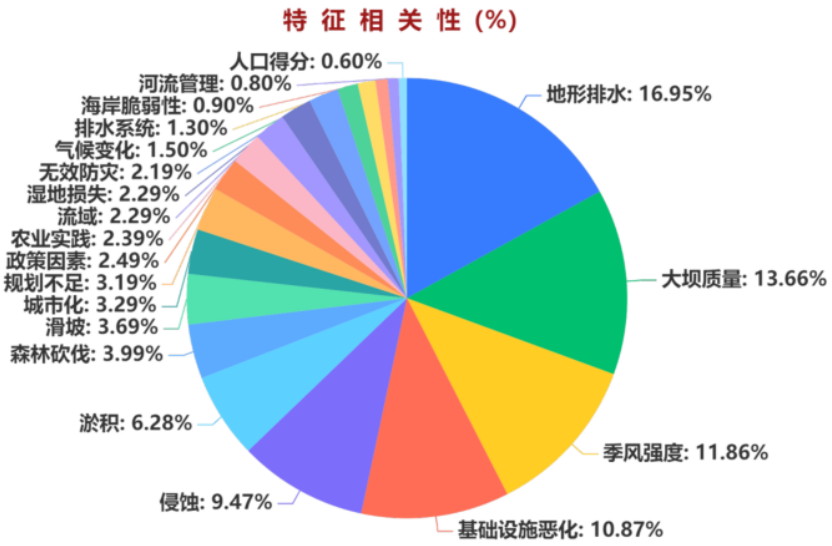


图 3 决策树回归模型求解结果

4.1.2 基于 XGBoost 回归模型的建立与求解

为了更有效的评估每个指标对洪水发生概率的影响，同时利用 XGBoost 回归模型进行分析。XGBoost（Extreme Gradient Boosting）模型[3]是基于决策树的集成学习方法，通过组合多棵决策树来提高模型的预测性能，如图 4 所示。

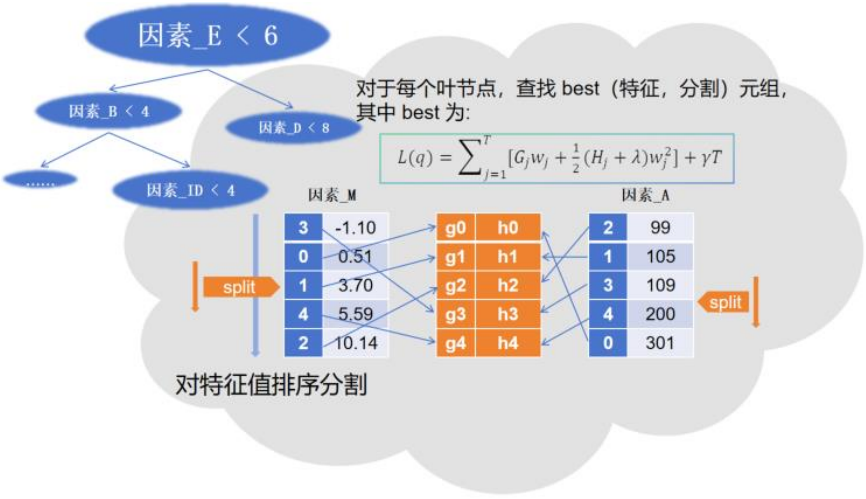


图 4 XGBoost 回归模型

XGBoost 回归模型的目标是最小化以下目标函数，如公式（5）所示：

$$L(\theta)=\sum_{i=1}^{n} l(y_i,\hat{y}_i)+\sum_{k=1}^{K}\Omega(f_k) \tag{5}$$

其中，y_i是实际的洪水发生概率，$\hat{y}_i$是模型预测的洪水发生概率，l是损失函数，Ω是正则化项，n是样本数，K是树的数量。

对于洪水发生概率预测，使用 MSE 作为损失函数，如公式（6）所示：

$$MSE=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2 \tag{6}$$

利用正则化项（公式（7））控制模型的复杂度以防止过拟合，包括树的复杂度和叶节点权重：

$$\Omega(f) = \gamma T + \frac{1}{2}\lambda \sum_{j=1}^{T} w_j^2 \tag{7}$$

其中，T是树的叶节点数量，w_j是第j个叶节点的权重，γ、λ是正则化参数。

XGBoost 通过迭代构建树的方式进行训练，每次迭代时，模型会根据当前残差来生成新的树，从而逐步减少误差。在洪水发生概率预测的过程中，每次迭代都会基于之前的预测误差，调整模型参数以改进预测结果。

详细模型建立与训练过程如下：

初始化模型参数：设置初始的预测值为洪水发生概率的平均值。其中，平均值代表了数据的中心趋势，使模型在初始阶段具有较低的预测误差，有助于模型更快地收敛到最优解，增强了梯度下降算法的有效性，并提高训练效率。

计算梯度和 Hessian 矩阵：对于每个样本，计算损失函数的一阶导数和二阶导数，即梯度和 Hessian 矩阵（公式（8）-（9））从而在洪水发生概率的预测过程中，由此更新模型参数以不断减少预测误差。

$$\nabla L(\theta) = \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1}, \frac{\partial L}{\partial \theta_2}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \theta_n}\right) \tag{8}$$

$$H(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2 \partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_n \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_n \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_n^2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

生成新的决策树：根据计算出的梯度和 Hessian 矩阵，生成新的决策树以拟合当前的洪水发生概率预测误差。新的决策树通过最小化以下目标函数进行训练，如公式（10）所示：

$$L(q) = \sum_{j=1}^{T} \left[G_j w_j + \frac{1}{2}(H_j + \lambda) w_j^2\right] + \gamma T \tag{10}$$

其中，G_j和H_j分别是叶节点j的梯度和 Hessian 矩阵的总和，w_j是叶节点的权重，q是决策树的结构，T是叶节点的数量。

更新模型参数：根据新生成的决策树，更新模型的预测值（公式（11））。

$$\hat{y}_{\mathrm{i}}^{(t+1)} = \hat{y}_{\mathrm{i}}^{(t)} + \eta f_k(x_i) \tag{11}$$

其中，η是学习率，f_k是第k棵树的模型。通过每次迭代更新预测值，逐步减少洪水发生概率的预测误差。

迭代训练：重复计算梯度和 Hessian 矩阵、生成新的决策树以及更新模型参数这三个步骤，直到损失函数收敛或达到最大迭代次数。每次迭代都会生成一棵新的决策树，逐步提升模型的预测能力，从而更准确地预测洪水发生概率。

模型验证：使用交叉验证（cross-validation）评估模型性能，防止过拟合。cross-validation 将数据集分成多个子集，在不同子集上训练和验证模型，从而获得更稳定和可靠的性能评估。通过计算 MSE 和决定系数（R^2）（公式（12））来衡量模型的预测准确性：

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2} \tag{12}$$

其中，$\overline{y}$是实际洪水发生概率的均值。

特征重要性分析：训练结束，通过特征重要性分析识别对洪水发生概率影响的指标排序。

值得注意的是，基于 XGBoost 模型对洪水发生概率进行预测后，进一步使用 SHAP（SHapley Additive exPlanations）值（图 5）量化每个特征对预测结果的相关性，提供全局和局部的解释，从而更准确地解释每个特征对洪水发生概率预测的影响，增强模型的解释性和透明度。

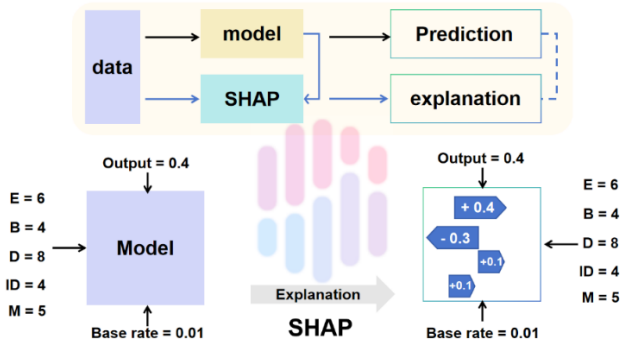


图 5 SHAP 原理图示

特别地，SHAP 值基于博弈论中的 Shapley 值，为每个特征分配一个归一化数值，表示该特征对预测结果的影响，确保了每个特征的关联值总和等于模型预测值与基线预测值的差异，从而提供了一致的解释框架。其计算公式如下所示：

$$\phi_i = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\cdot(|N|-|S|-1)!}{|N|!}[f(S \cup \{i\}) - f(S)] \tag{13}$$

其中，ϕ_i表示特征i的 SHAP 值，N是所有特征的集合，S是特征的子集，$f(S)$是只包含特征子集S时的模型预测值，$f(S \cup \{i\})$是包含特征子集S和特征i时的模型预测值。

完成上述步骤后，得到最终结果如图 6 所示。

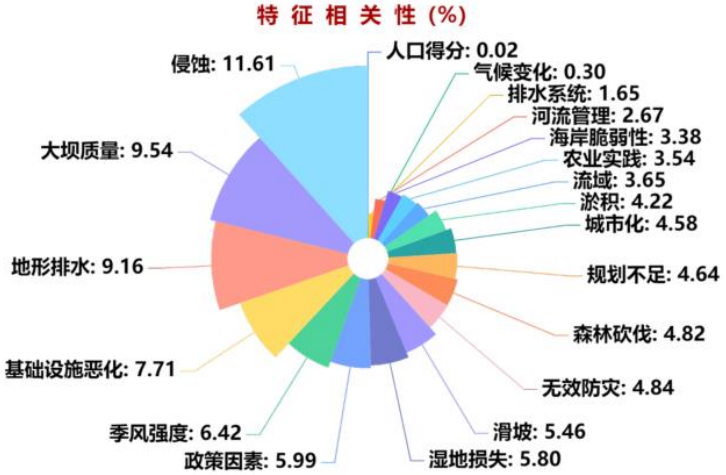


图 6 XGBoost 回归模型求解结果

4.1.3 针对决策树回归模型与 XGBoost 回归模型的综合分析

在前两节中，分别使用了决策树回归模型和 XGBoost 回归模型对洪水发生概率进行了预测分析。最终结合两个模型的预测结果，确保得出的关键指标在不同模型中均表现显著，从而提供更加全面且可信的洪水预测依据。两个模型得出的结果具有一致性，经过分析得到弱相关性的结果有 5 个，分别为人口得分、气候变化、排水系统、河流管

理和海岸脆弱性，其余 15 个指标均为强相关性。

4.2 指标相关性的原因分析

针对相关性强的指标（侵蚀、大坝质量、地形排水等）而言，它们对洪水的发生概率有直接且显著的影响。比如侵蚀和地形排水条件决定了地表水的吸收和流动情况；大坝质量和基础设施的状况直接关系到防洪能力的有效性；季风强度会带来大量降雨，迅速增加地表径流量，这些因素都会显著增加洪水发生的概率。

相对而言，人口得分、气候变化、排水系统、河流管理和海岸脆弱性这些指标与洪水发生的直接相关性较弱。虽然这些因素在一定程度上影响洪水风险，但它们更多地影响洪水的后果和长期风险。比如，气候变化的短期效应难以精确量化；人口得分和气候变化虽然对环境和气候有长期影响，但短期内对洪水发生的直接影响有限。

因此，通过对强弱相关性指标的分析，实现了更加清晰地理解洪水发生的主要驱动因素和次要因素。

4.3 提前预防的合理建议与措施

基于以上指标相关性分析，提出以下合理的提前预防措施：

针对强相关性指标，例如增强季风强度监测和预报，提高地形排水能力，以及定期检查和维护大坝等关键基础设施，确保其在极端天气条件下的稳定性和可靠性。此外，加强侵蚀防治措施，防止土壤流失，也是降低洪水风险的重要手段。

针对弱相关性指标，同样需要采取相应措施以提高整体防洪能力。例如，改善排水系统和河流管理，提高城市和农村地区的排水效率和抗洪能力；通过政策和规划减少人口密集区的洪水风险，特别是在气候变化加剧的背景下，加强对气候变化的长期研究和监测。通过综合运用这些措施，实现有效提高洪水预防和应对能力，减少洪水灾害对人类社会的影响。

五、问题 2 模型的建立与求解

5.1 不同等级洪水事件的分类及分析

为界定不同等级的洪水事件，首先将附件 train.csv 中洪水发生的概率通过频率分布直方图表示，如图 7 所示。由图可知，大部分洪水数据分布在概率数值为 0.5 附近。为进一步明确等级界限，利用肘部法则（Elbow Method）评估不同簇数下聚类模型的表现，绘制了 SSE 与簇数关系图，通过观察图中的拐点得出最优簇数为 3，如图 8 所示。该值正好对应题中的高、中、低三个事件等级，进一步验证了洪水事件三分类的合理性和科学性，为后续的特征分析和预警模型的建立提供了基础。

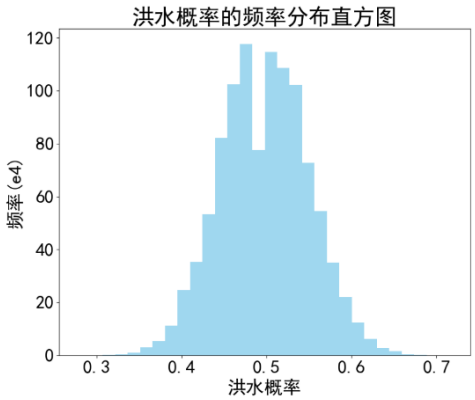


图 7 洪水概率的频率分布直方图

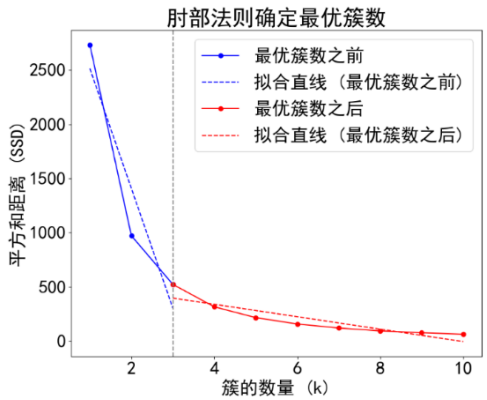


图 8 肘部法则确定最优簇数图

由上述分析后，利用 K-means 算法[4]对洪水数据进行聚类，分为高、中、低三种不同等级。该算法作为一种迭代聚类算法，将数据分割成 k 个簇，使得同一簇内的数据点彼此之间更加相似，更加有效地将不同风险等级的事件进行区分。

针对 K-means 算法，具体实现步骤如下：

随机选择 k 个初始聚类中心$\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k\}$，本题 k=3，分别表示高风险、中风险和低风险三类。

将每个数据点分配到最近的聚类中心，依据欧氏距离计算公式（公式（14））：

$$d(x_i, \mu_j) = \sqrt{\sum_{m=1}^{n} (x_{im} - \mu_{jm})^2} \tag{14}$$

其中，$d(x_i, \mu_j)$表示数据点x_i到聚类中心μ_j的距离，n为数据的维度。对于洪水发生概率数据，该步骤将每个事件分配到对应的风险等级。

重新计算每个簇的聚类中心，将其更新为该簇内所有数据点的平均值（公式（15））。

$$\mu_j = \frac{1}{|C_j|} \sum_{x_i \in C_j} x_i \tag{15}$$

其中，μ_j是第 j 个聚类中心，C_j是第 j 个簇的数据点集合，$|C_j|$是该簇中数据点的数量。更新聚类中心能够使每次迭代后聚类中心更准确地代表簇内数据点的中心位置。

重复迭代分配数据点、更新聚类中心两步骤多次，直到聚类中心不再发生变化或达到最大迭代次数，确保聚类结果的稳定性和准确性。

经过上述步骤，最终成功将附件 train.csv 中洪水发生的概率聚类成不同类别，得到三个簇，每簇对应一种风险等级（高、中、低），如图 9 所示。

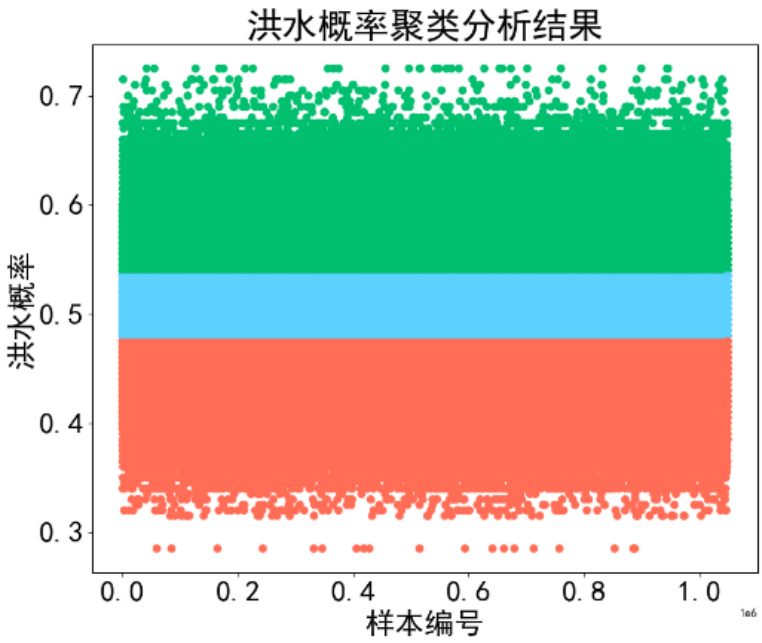


图 9 洪水概率聚类分析结果

5.2 随机森林回归预警评价模型的建立与求解

利用随机森林[5]回归模型（图（10））建立预警评价模型实现预测洪水发生的风险等级。将上一节聚类成功完成后的三类数据分三次输入至预警评价模型中，得出最合适的关联指标及其权重值。

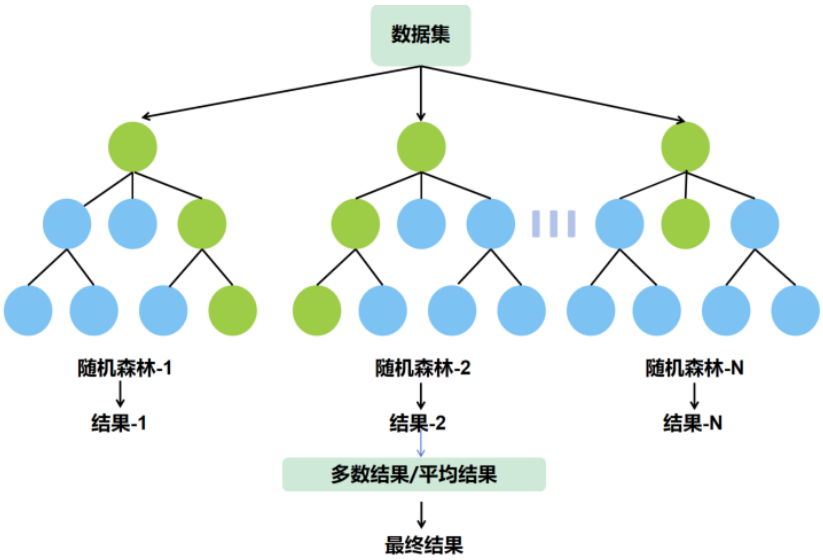


图 10 随机森林模型

对于预警评价模型，详细模型建立与训练过程如下：

首先进行数据标准化，对所有特征进行标准化处理，使其均值为 0，标准差为 1，以确保模型训练的稳定性和准确性。

随机抽样：在相同类别的洪水数据中随机抽取多个子样本，每个子样本用于训练一棵决策树。假设原始数据集有 n 个样本，每个子样本的大小也是 n，通过有放回抽样的方法形成不同的子样本集。

决策树构建：对每个子样本构建一棵决策树。在每个节点上，随机选择 m 个特征（通常为总特征数的平方根），并在这些特征中选择最佳分裂特征和分裂点，以最大化信息增益（公式（16））或最小化均方误差（MSE）。

$$\text{Gain}(S,A) = \text{Entropy}(S) - \sum_{v\in\text{Values}(A)} \frac{|S_v|}{|S|}\text{Entropy}(S_v) \tag{16}$$

其中，$\text{Entropy}(S)$是集合S的熵，$\text{Values}(A)$是特征A的所有可能取值，S_v是特征A取值为v的子集。

所有决策树构建完成后，通过集成这些树的预测结果来进行回归预测。具体来说，对每棵树的预测结果取平均值（公式（17））。

$$\hat{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{y}_t \tag{17}$$

其中，$\hat{y}$是最终的预测值，$\hat{y}_t$是第t棵树的预测结果，T是决策树的总数。

通过初始划分出的测试数据对模型进行评估，并计算模型的 MSE 和 R^2。最后通过对模型的特征重要性分析包括特征重要性得分以及特征重要性总和归一化（公式（18）-（19）），得出对洪水风险预测影响最大的几项指标。

$$\text{Importance}(f_j) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\text{MSE}_{\text{before}} - \text{MSE}_{\text{after}}) \tag{18}$$

其中，$\text{Importance}(f_j)$表示特征f在所有树中的重要性得分，$\text{MSE}_{\text{before}}$是分裂前的 MSE，$\text{MSE}_{\text{after}}$是分裂后的 MSE。

$$w_j = \frac{\text{Importance}(f_j)}{\sum_{i=1}^{n}\text{Importance}(f_i)} \tag{19}$$

其中，w_j是特征f_j的归一化权重，n是特征的总数。

由上述步骤，有效建立了洪水不同风险等级的预警评价模型，根据模型进行特征重要性分析与权重计算，验证模型对于不同指标的灵敏度。最终结果如表 1 所示。

表 1 不同等级洪水事件相应指标特征及权重值

特征名称	高风险	特征名称	中风险	特征名称	低风险
地形排水	14.20%	地形排水	14.10%	大坝质量	13.40%
淤积	12.30%	无效防灾	13.40%	基础设施恶化	10.80%
农业实践	11.50%	农业实践	8.90%	滑坡	10.30%
河流管理	8.80%	气候变化	6.40%	河流管理	9.10%
人口得分	7.80%	规划不足	6.30%	气候变化	8.40%
滑坡	7.30%	城市化	5.30%	城市化	7.80%
湿地损失	7.00%	基础设施恶化	5.30%	人口得分	7.20%
无效防灾	5.80%	侵蚀	5.20%	森林砍伐	5.70%
政策因素	4.90%	流域	5.00%	淤积	4.90%
气候变化	4.50%	湿地损失	5.00%	湿地损失	4.60%
大坝质量	3.40%	大坝质量	4.20%	季风强度	4.30%
城市化	3.30%	排水系统	3.80%	侵蚀	3.80%
规划不足	2.60%	人口得分	3.60%	海岸脆弱性	3.30%
流域	1.70%	滑坡	3.10%	规划不足	2.70%
季风强度	1.50%	政策因素	3.00%	地形排水	1.10%
森林砍伐	1.30%	河流管理	2.80%	政策因素	1.10%
排水系统	1.00%	淤积	1.90%	排水系统	0.80%
基础设施恶化	1.00%	季风强度	0.90%	流域	0.80%
侵蚀	0.00%	森林砍伐	0.90%	农业实践	0.00%
海岸脆弱性	0.00%	海岸脆弱性	0.90%	无效防灾	0.00%

由表 1 可知，具有高、中、低风险的洪水事件都具有相应的指标特征，对于高风险洪水事件最能够影响其发生的指标及其权重依次分别为：地形排水（14.20%）、淤积（12.30%）、农业实践（11.50%）、河流管理（8.80%）、人口得分（7.80%）等；对于中风险洪水事件最能够影响其发生的指标及其权重依次分别为：地形排水（14.10%）、无效防灾（13.40%）、农业实践（8.90%）、气候变化（6.40%）、规划不足（6.30%）等；对于低风险洪水事件最能够影响其发生的指标及其权重依次分别为：大坝质量（13.40%）、基础设施恶化（10.80%）、滑坡（10.30%）、河流管理（9.10%）、气候变化（8.40%）等；

此外，通过模型灵敏度分析，验证模型的稳健性，确保在不同情境下模型仍然具有可靠的预测性能。同样地，结合表 1 数据得到针对 20 个指标对模型的灵敏度影响。

六、问题 3 模型的建立与求解

6.1 数据预处理

基于问题 1 的分析结果确定对于洪水发生概率具有强关联性的相应指标作为所需建立预测模型的数据集。由于提供数据量较大，故需检查数据集是否存在缺失值以防止

预测模型出现训练误差。针对缺失数据处理方法为删除含有缺失值的样本、使用均值或中位数填充缺失值，以及使用插值法填补缺失值。

6.2 基于神经网络的洪水发生概率预测模型建立与求解

6.2.1 单层感知机模型

单层感知机作为神经网络模型（图 11），主要解决线性可分的分类问题，由一个输入层和输出层组成，能够对输入特征进行加权求和并通过激活函数产生输出。

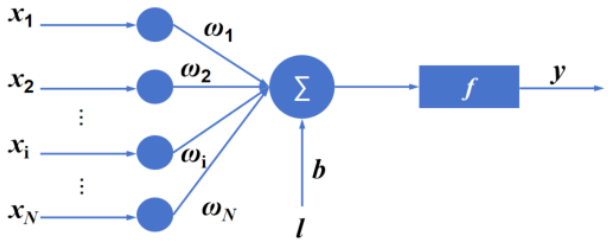


图 11 单层感知机模型

输入层接受多维向量$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$，每个输入特征$x_i$对应一个权重$w_i$，所有权重构成向量权重$W = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$，偏置$b$用于调整决策边界的位置。

输出层计算加权和并通过激活函数生成输出：$y = \sigma(W \cdot X + b)$，其中，$\sigma$是激活函数。常用的激活函数包括阶跃函数和线性函数。

利用 MSE 误差函数衡量模型预测值与实际值之间的差异$e = y - \hat{y}$，并不断更新权重和偏置：$W = W - \eta eX$，$b = b - \eta e$；直至差小于预设阈值或达到最大迭代次数时停止训练。

然而，单层感知机表达能力有限无法捕捉复杂的模式和特征，比如非线性问题。因此，多层感知机（MLP）的引入实现处理更复杂的数据和关系。

6.2.2 MLP 模型的建立与求解

MLP 模型[6]（图 12）作为深度学习方法，通过多层非线性变换捕捉复杂的特征关系，具有强大的非线性拟合能力，主要包括输入层、中间层（一个或多个隐藏层）、输出层。相比传统的线性模型，它能够更好地处理多维数据和非线性关系，针对题目中涉及的复杂多变的气象、地理、人口等洪水数据，该模型尤为合适。灵活性和可扩展性使其能够适应不同规模和复杂度的数据集，通过调整网络结构和参数实现最优预测性能。

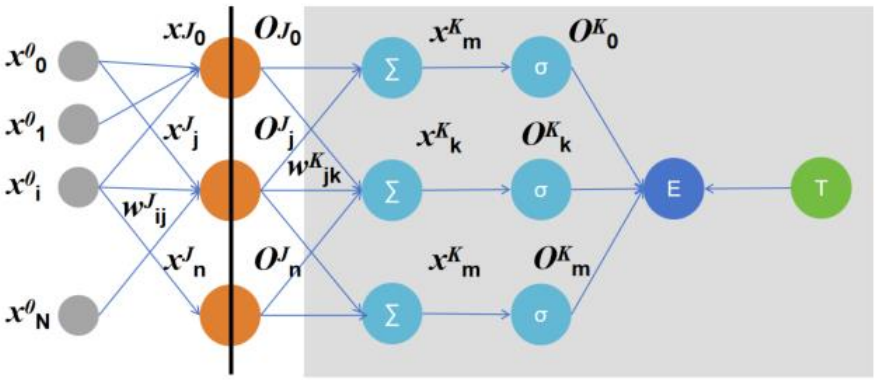


图 12 MLP 感知机模型

模型建立的过程主要分为三个阶段：数据准备、模型训练以及模型推理。

（1）数据准备阶段

将经过数据预处理后产生的数据作为输入特征输入模型。具体地，选定的指标特征包括侵蚀、基础设施恶化、季风强度、大坝质量、地形排水、淤积。

（2）模型训练阶段

首先，数据按照 7:2:1 的比例划分为训练集、验证集和测试集，完成模型的训练；

接下来，训练集数据依次进入模型的输入层、中间层、输出层；

模型中包含多个隐藏层，每个隐藏层由若干神经元组成，每个神经元与前一层的所有神经元全连接，使用非线性激活函数 ReLU（Rectified Linear Unit）以捕捉非线性关系。隐藏层的输出通过全连接层传递到下一层。

隐藏层定义如下所示：

$$H = \sigma(W_h \cdot X + b_h) \tag{20}$$

其中，H是隐藏层输出，W_h和b_h分别是隐藏层的权重和偏置，σ是激活函数。

ReLU 激活函数定义如下所示：

$$\sigma(z) = max(0, z) \tag{21}$$

其中，z是输入值。ReLU 函数能够有效缓解梯度消失问题。

输出层由一个神经元组成，使用 sigmoid 激活函数将输出值限制在 0 到 1 之间，表示洪水发生的概率。

输出层定义如下所示：

$$Output = \sigma(W_o \cdot X + b_o) \tag{22}$$

其中，$Output$是最终预测值，W_o和b_o分别是输出层的权重和偏置。

sigmoid 激活函数定义如下所示：

$$\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}} \tag{23}$$

其中，z是输入值。Sigmoid 函数将输出值映射到(0, 1)区间，适合概率输出。

因此，MLP 模型的公式如下所示：

$$Output = \sigma(W_o \cdot \sigma(W_{h2} \cdot \sigma(W_{h1} \cdot X + b_{h1}) + b_{h2}) + b_o) \tag{24}$$

模型训练过程中，使用 MSE 作为损失函数，定义如下所示：

$$L(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_t)^2 \tag{25}$$

使用 Adam 优化器进行梯度下降，更新模型参数。此外，结合动量和自适应学习率调整进行优化。

Adam 优化器参数更新如公式（26）-（30）所示：

$$m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1-\beta_1)\nabla_\theta \mathcal{L}(\theta) \tag{26}$$

$$v_t = \beta_2 v_{t-1} + (1-\beta_2)(\nabla_\theta \mathcal{L}(\theta))^2 \tag{27}$$

$$\widehat{m}_t = \frac{m_t}{1-\beta_1^t} \tag{28}$$

$$\hat{v}_t = \frac{v_t}{1-\beta_2^t} \tag{29}$$

$$\theta = \theta - \eta \frac{\widehat{m}_t}{\sqrt{\hat{v}_t}+\epsilon} \tag{30}$$

其中，η是学习率，β_1和β_2是动量项的衰减系数，ϵ是防止除零的一个极小值。

训练过程中，为防止模型在训练集上表现良好但在验证集和测试集上表现较差的过

拟合问题，采用早停技术（early stopping），即在每个训练迭代周期结束时，监控模型在验证集上的损失函数值。如果在若干迭代周期内验证集损失值没有显著下降或开始上升，则提前停止训练，并恢复到验证集损失值最小的模型参数。不仅防止过拟合，提高模型的泛化能力，而且节省训练时间，确保了模型在实际应用中的预测准确性和可靠性。

（3）数据推理阶段

模型训练完成后，在测试集上计算 MSE（公式（6））和R^2（公式（12））评估其性能，确保模型能够准确预测洪水的发生概率。

R^2表示模型解释自变量总变异的比例，其值越接近 1，表示模型对洪水发生变异解释能力越强，预测效果越好。

$R^2 \approx 1$表示模型能很好地解释洪水发生的概率，性能较好；

$0 < R^2 < 0.5$ 表示模型对洪水发生概率的解释能力较弱，性能较差；

$R^2 \approx 0$表示模型几乎不能解释洪水发生的变异，性能较差；

MSE 衡量了预测值与实际值之间的平均平方误差。值越小，表示模型的预测误差越小，性能越好。

性能评估完成后，利用交叉验证调整模型超参数以选择最佳参数组合。不断调整后验证模型最终预测性能。

6.2.3 MLP 模型结果分析

完成 MLP 模型的建立、训练和推理后，对其在测试集上的表现进行详细评估和分析。针对基于问题 1 分析结果训练的预测模型，得出结果，如图 13-14 所示。

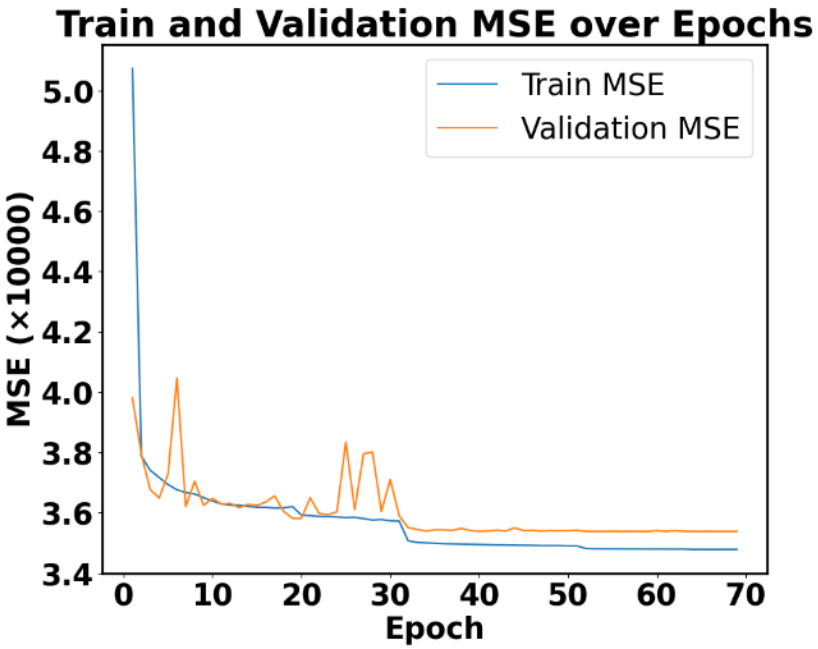


图 13 MLP 模型 MSE 结果

由图 13 显示了训练和验证的 MSE 随迭代次数（Epochs）的变化情况。训练 MSE 在最初几次迭代中迅速下降，随后趋于稳定，验证 MSE 则在前面几个 Epoch 内波动较大，但最终与训练 MSE 接近，且趋于平稳。表明模型在学习过程中成功拟合了训练数据，同时在验证数据上也具有良好的泛化能力，未出现明显的过拟合现象。

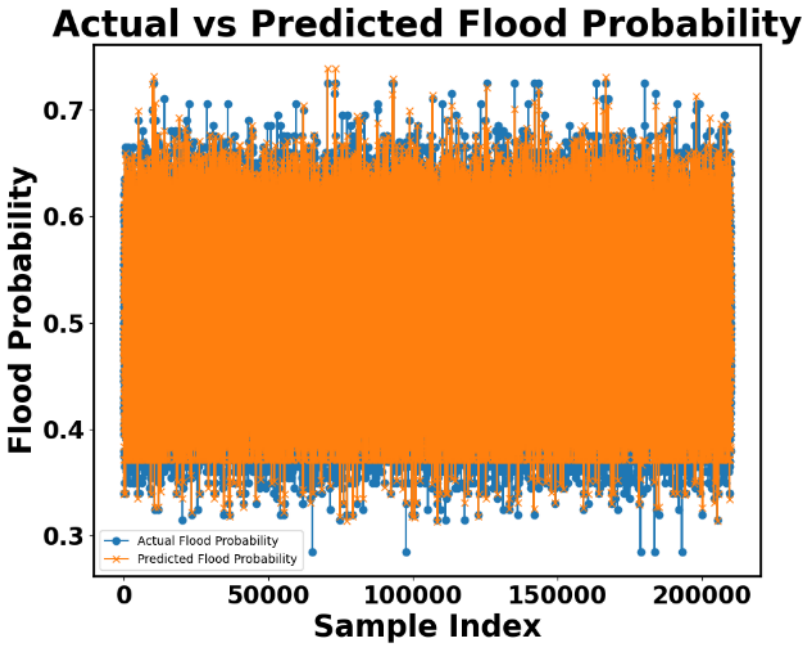


图 14 MLP 模型拟合结果

为进一步验证模型的预测性能和稳定性，由图 14 显示，预测值与真实值之间高度重合，表明模型在大多数情况下能够准确预测洪水发生的概率。结合图 13 可以得出模型在训练和验证阶段都表现良好，且在实际测试中保持了良好的预测性能，未出现明显的过拟合或欠拟合现象。模型的高拟合度和稳定性使其适用于洪水发生概率的预测。

6.3 关键指标下的模型调整与优化

根据问题 1 得到的 15 个指标，选择前 5 个作为关键指标特征（地形排水、大坝质量、季风强度、基础设施恶化、侵蚀）用于训练改进后的模型。

为了与调优后的模型有效对比，在原模型的基础上实现进行拟合验证，如图 15 所示。

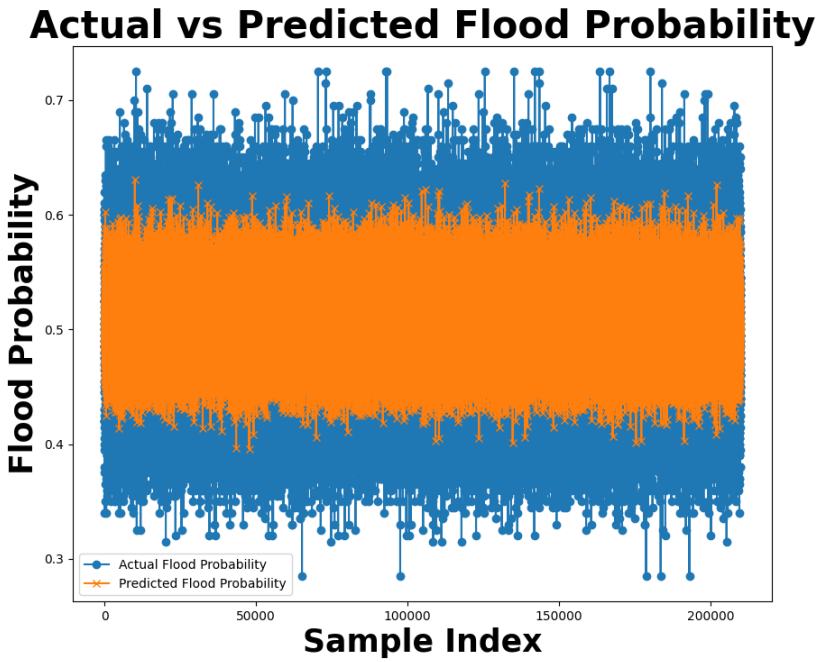


图 15 调优前的 MLP 模型拟合结果

由图 15 可以看出，模型预测值（橙色）在整体上较为集中，呈现出较为均匀的分布，主要集中在 0.4 到 0.6 之间；而实际值（蓝色）则表现出更大的波动范围，从 0.3 到 0.7 不等。尽管存在一些偏差，但总体上，模型的预测值与实际值有较好的重合度，表明模型在大多数情况下能够准确预测洪水发生的概率。然而，某些区域的实际值与预测值仍有显著差异，模型需要进一步优化。

因此，在上述建立的 MLP 模型的基础上改进模型，实现减少特征后仍能保持预测性能不变，主要从以下几个方面进行调整和优化：

调整网络结构

隐藏层数量和神经元数量：根据减少后的特征数量，减少隐藏层的数量和每层神经元的数量，以避免模型过于复杂。

正则化技术

在隐藏层中添加 Dropout 层，随机丢弃部分神经元，以增强模型的泛化能力。具体公式如下所示：

$$h_i = \begin{cases} \frac{h_i}{1-p} & \text{if } h_i \text{ is retained} \\ 0 & \text{if } h_i \text{ is dropped} \end{cases} \tag{31}$$

其中，h_i是第i个神经元的输出，p是 Dropout 的保留概率。

在损失函数中添加 L2 正则化项，以防止权重过大导致过拟合。具体公式如下所示：

$$L(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda\sum_{j=1}^{m}\theta_j^2 \tag{32}$$

其中，$L(\theta)$是是损失函数，n是样本数量，λ是正则化强度超参数，θ_j是模型参数，m是参数数量。

超参数调优

学习率调整：通过网格搜索的方法，调整学习率以平衡训练速度和稳定性。

Batch 大小调整：根据数据量和模型复杂度，调整 Batch 大小以优化训练效率和模型性能。

完成以上调优后，观察拟合度评估模型性能，如图 16 所示。

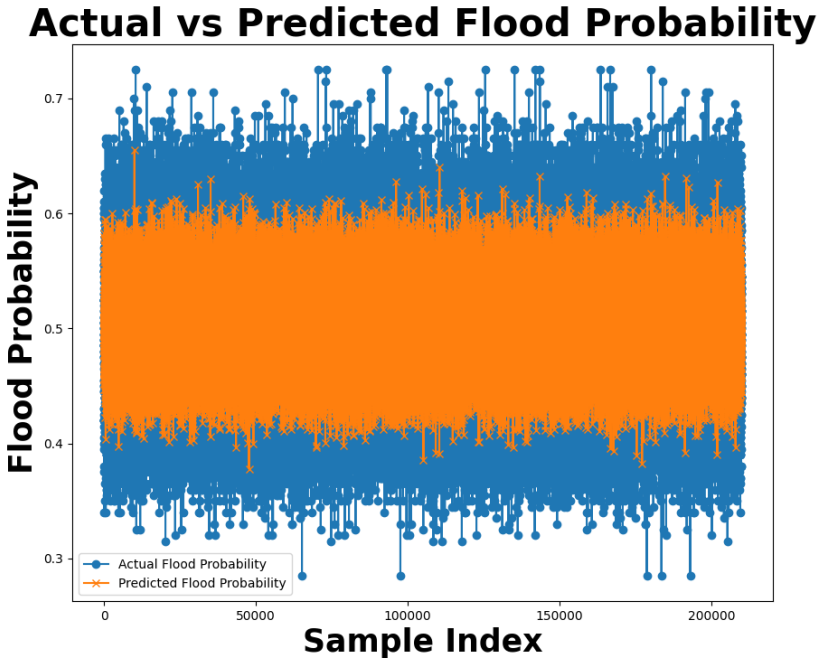


图 16 调优后的 MLP 模型拟合结果

由图 16 显示调优后的预测值和实际值更加紧密重合，表明模型在大多数情况下的预测准确度有所提高。尽管特征数量从 15 个减少到 5 个，模型的简化并没有显著影响其性能，这得益于对关键特征的优化选择和模型结构的调整。然而，由于特征数量减少，某些复杂因素可能未被完全捕捉，导致在部分区域仍存在一定的偏差。总体而言，调优后的模型在简化特征集的情况下，依然保持了较高的预测精度，证明了优化策略的有效性。

七、问题 4 的求解

7.1 洪水发生概率的数据预测

基于问题 3 中建立的洪水发生概率预测模型，预测附件 test.csv 中所有事件发生洪水的概率。首先对需预测数据进行与训练数据相同的预处理过程，处理后将测试数据输入至预测模型，得到每个事件的洪水发生概率并将结果保存到附件 submit.csv（见附录）。

7.2 预测结果的可视化与分析

针对已经预测出的数据进行可视化得到概率直方图和折线图，如图 17-18 所示。

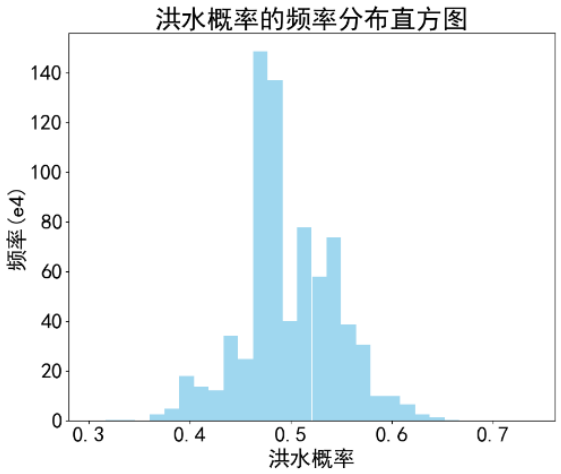


图 17 洪水概率的频率分布直方图

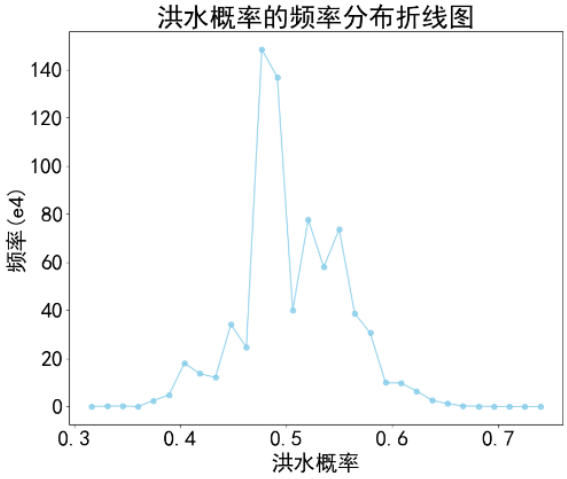


图 18 洪水概率的频率分布折线图

由图 17 显示了直方图的形式下的洪水发生概率的频率分布，频率分布呈现中心聚拢，并向两侧逐渐减少，峰值位于 0.50 附近，数据呈钟形分布。

由图 18 显示了折线图的形式下的洪水发生概率的频率分布，分布范围大致在 0.35 到 0.70 之间，同样地，峰值也出现在 0.50 左右，频率最高，呈现出一个大致对称的钟形分布。

通过直观观察两个图像，它们都符合正态分布的基本形态特征。此外，分布的均值接近 0.50，标准差适中，进一步验证了其接近正态分布的结论。

为了更准确地判断数据是否服从正态分布，选择 Shapiro-Wilk 统计（公式（33））进行检验，得到结论：p值>0.05，则可以认为数据服从正态分布。

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{33}$$

其中，$x_{(i)}$表示第i个排序的样本值，$\bar{x}$表示样本均值，a_i表示权重系数，由样本大小n决定。

综合上述方法，得出洪水发生概率的分布服从正态分布。

八、模型的评价及推广

模型优点

1、采用决策树回归和 XGBoost 回归模型，实现高效处理复杂数据。决策树回归模型通过树形结分裂构特征，捕捉复杂交互作用；XGBoost 回归模型通过集成多棵弱学习树并使用梯度提升方法，有效减小误差，提高洪水发生概率预测的准确性。

2、结合不同模型得出预测结果，确保关键指标在不同模型中均表现显著，使得结果具有较强的可信性。

3、通过树形结构和特征重要性分析，实现清晰地看到各个特征对预测结果的贡献，从而帮助理解模型的决策过程，便于用户信任和采用。

模型缺点

1、由于考虑的变量较多，模型中可能存在多重共线性问题，从而影响模型的稳定性和预测精度。

2、对于需要实时更新和处理的数据，现有模型可能需要频繁地重新训练，导致计算成本增加。

模型推广

1、文中的回归模型还可推广应用于其他自然灾害预测领域，如地震、台风等。

2、将文中的模型与大数据处理平台相结合，提高数据处理和模型训练的效率，利用分布式计算技术，实现对海量数据的实时分析和预测。

参考文献

[1]杨丹.区域洪水灾害风险特征及其演化态势分析[D].东北农业大学,2023.
[2]Costa, V.G., Pedreira, C.E. Recent advances in decision trees: an updated survey. Artif Intell Rev 56,4765–4800,2023.
[3]Chen, T., Guestrin, C. XGBoost: A Scalable Tree Boosting System. Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining,785–794,2016.
[4]王森,刘琛,邢帅杰.K-means 聚类算法研究综述[J].华东交通大学学报, 39(05):119-126,2022.
[5]Parmar, A., Katariya, R., Patel, V. A Review on Random Forest: An Ensemble Classifier. International Conference on Intelligent Data Communication Technologies and Internet of Things (ICICI),26:758-763,2018.
[6]张荣,李伟平,莫同 深度学习研究综述[J].信息与控制, 47(4):385-397,2018.

选题	2024 年第十四届 APMCM 亚太地区大学生数学建模竞赛（中文赛项）	参赛编号
C		apmcm 24100023

基于 QUBO 模型的物流配送优化

摘要

本文研究了基于量子计算的物流配送问题，旨在通过量子计算技术优化物流配送方案，降低成本并提高效率。首先，本文介绍了量子计算方法的高效性，尤其是**相干伊辛机（CIM）**在解决复杂优化问题方面的优势。接着，本文以物流配送问题的数学模型为基础构建了 **QUBO 模型**，并利用 **Kaiwu SDK** 中的 **CIM 模拟器**和**模拟退火求解器**进行求解。最后，本文将 QUBO 模型的应用拓展到金融领域。

针对问题一：对于单个物流公司运营成本最小化问题，本文首先通过**迪杰斯特拉算法**求出最短路径，而后建立了一般数学模型并转化为 **QUBO 模型**，然后通过 **CIM 模拟器**和**模拟退火求解器**进行求解，得到了最佳货车租赁方案和货物运输方案，并计算出**公司一和公司二的最低总成本分别为 197500 元和 172000 元。**此外，本文还通过与**贪心算法**和**遗传算法**的对比，展现了 **QUBO 模型**的优势，包括计算速度快、精度高等。

针对问题二：在允许两公司之间合作拼货运输的条件下，本文在第一问的基础上更新了一般数学模型并转化为 **QUBO 模型**，同时分解为若干个 **SubQUBO 模型**利用 **CIM 模拟器**和**模拟退火求解器**求解，并用**贪心算法**和**遗传算法**加以比较验证，得到了最佳货车租赁方案和货物运输方案，并计算出**两公司合作时的最低总成本为 318000 元，比分别单独运输时节约了 51500 元**，由此证明了合作拼货运输可以降低两公司总成本，提高物流效率。

针对问题三：本文提出了一个金融领域基于 QUBO 模型的**信用评分卡优化场景**，并建立了对应的 QUBO 模型表达式。通过分析模型涉及的变量数量，计算得出模型所需的**比特数量级**，为后续研究和应用提供了参考。

本文将量子计算技术应用于物流配送优化问题，通过 **QUBO 模型**实现了最小化运营总成本的目标，并分析了合作拼货运输的优势，同时还利用**贪心算法**和**遗传算法**验证了 QUBO 模型的优越性。此外，本文还提出了一个具有学术价值和应用前景的金融领域的信用评分卡优化场景，为量子计算技术在更多领域的应用提供了思路。

关键词：物流配送优化、QUBO 模型、CIM、模拟退火、贪心算法、遗传算法

目　　录

一、问题重述与背景介绍 1
1.1 问题重述 1
1.2 背景介绍 1
1.2.1 二次无约束二进制优化(QUBO)模型： 1
1.2.2 CIM 模拟器 2
1.2.3 模拟退火算法 2
二、问题分析 4
2.1 问题总分析 4
2.2 问题一的分析 4
2.3 问题二的分析 5
2.4 问题三的分析 5
三、模型假设 5
四、符号说明 6
五、模型建立与求解 6
5.1 问题一模型的建立与求解 6
5.1.1 数据预处理 6
5.1.2 构建数学模型和 QUBO 模型 8
5.1.3 模型的求解 11
5.1.4 问题一模型检验 13
5.2 问题二模型的建立与求解 13
5.2.1 问题二模型建立 13
5.2.2 问题二模型求解 16
5.3 问题三的模型 17
5.3.1 问题背景及实际意义 17
5.3.2 符号设计 18
5.3.3 模型建立与求解 18
六、模型评价、改进与推广 19
6.1 模型的优点 19
6.2 模型的缺点 20
6.3 模型的改进与推广 20
七、参考文献 21
八、附录 22

一、问题重述与背景介绍

1.1 问题重述

电子商务的飞速发展使得物流配送需求日益增长。面对复杂的运输需求，传统的物流优化方法已不足以高效地解决物流问题，故而催生了新型的量子计算技术来自动计算运输综合策略，物流公司得以有更高效的方法来更有效地进行物流配送安排，实现物流效率的提高、运输成本的降低及消费者满意度的提升。

相干伊辛机在处理相关复杂优化问题中表现出巨大的潜力，故而本问题要求在物流配送场景下，将问题建立在与相干伊辛机密切相关的 QUBO 模型上，使用 Kaiwu SDK 进行求解。

问题一：在拼货只分别发生在各物流公司内部的前提下，以最小化单个物流公司的运营成本为目标，在总要求的方法下，使用其中的 CIM 模拟器和模拟退火求解器分别设计出两个物流公司的最佳货车租赁方案和货物运输方案。

问题二：在两公司之间可以合作拼货运输的前提下，以最小化两公司总成本为目标，用 Kaiwu SDK 中的 CIM 模拟器和模拟退火求解器得出最佳货车租赁方案和货物运输方案，并计算其相较于问题一中得到的方案对于两公司总成本的减少量。

问题三：提出一个具有学术价值或商业化前景的设想，给出其对应的 QUBO 模型表达式，并计算模型所需比特数量级。

1.2 背景介绍

1.2.1 二次无约束二进制优化(QUBO)模型：

1.QUBO 模型的定义：

QUBO 模型是指二次无约束二值优化模型，它是一种用于解决组合优化问题的数学模型。在 QUBO 模型中，需要将问题转化为一个决策变量为二值变量，目标函数是一个二次函数形式优化模型，一般定义为下式：

$$y = x^T Q x$$

其中，Q 为QUBO矩阵，x为二进制变量组成的向量，即 x 为0-1 变量，其取值为{0,1}，QUBO 目标为找到使得y达到最值的x。

Q 矩阵的形式有以下 2 种：

①对称形式

$$q_{ij}' = \frac{q_{ij} + q_{ji}}{2}$$

②上三角形式

$$q_{ij}' = (q_{ij} + q_{ji}), i \le j$$
$$q_{ij}' = 0, i > j$$

当添加约束条件后转化为以下形式：

$$\min f(x)$$
$$s.t. Ax = b$$
$$f'(x) = f(x) + P(Ax-b)^T(Ax-b)$$

其中，P 表示正标量惩罚项。随着问题规模增加，若仍使用传统算法求解组合优化问题，将会大大增加求解的时间，如若利用 QUBO 模型，即可运行在量子计算机硬件上，通过量子计算机进行毫秒级别的加速求解，得以更高效地求解组合优化问题。

2.QUBO 模型中约束条件的转化：

QUBO 模型为二次无约束优化问题，故如要实际解决一些有约束条件的问题，需要在目标函数中引入二次惩罚项，从而将组合优化问题重新进行表述为 QUBO 模型。同类型的约束关系可以用惩罚函数以非常自然的方式体现在“无约束”QUBO 公式中[1]。在 QUBO 公式中，使用惩罚函数可以产生比较精确的模型表示，一些经典约束的惩罚项转换实现如下：

经典约束	等效惩罚
$x + y \leq 1$	$P(xy)$
$x + y \geq 1$	$P(1 - x - y + xy)$
$x + y = 1$	$P(1 - x - y + 2xy)$
$x \leq y$	$P(x - xy)$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$	$P(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$
$x = y$	$P(x + y - 2xy)$

其中，函数 P 为正的足够大的标量惩罚值。惩罚项指定的规则是：对于最小化问题的求解，如果是可行解，即满足约束条件，对应的惩罚项等于零；对于不可行解，即不满足约束条件的解，其惩罚项等于一些正的惩罚量。P 值的选取是该惩罚项设置好坏的关键因素。

1.2.2 CIM 模拟器

相干伊辛机 (Coherent Ising Machine，简称 CIM)，是一种基于光学技术的量子优化装置，主要用于解决复杂优化问题。相干伊辛机与 QUBO 模型联系紧密，将优化问题转化为 QUBO 模型后，可运用基于相干伊辛机求解 QUBO 模型的软件开发套件——Kaiwu SDK 进行求解，具体操作 CIM 模拟器的流程如下：

步骤一：在 Python 3.8 环境下安装并导入 Kaiwu SDK 库。

步骤二：输入本文中经转化而得的 QUBO 模型。

步骤三：选择 CIM 模拟求解器，模拟在相干光量子计算机上求解 QUBO 模型。

步骤四：设置 CIM 模拟器的参数。

步骤五：调用 Kaiwu SDK 库中提供的方法，将构建好的 QUBO 模型传递给 CIM 模拟器进行求解。

步骤六：获取结果。由于变量为二进制形式，故求得结果为二进制形式。

步骤七：将结果转化表示为实际问题所需结果。

1.2.3 模拟退火算法

模拟退火算法（Simulated Annealing，SA）是一种通用的全局优化算法，用于在搜索空间中找到全局最优解。它的基本原理是模拟物理学中的退火过程，从某一较高初始温度出发，通过温度参数控制搜索过程中接受次优解的概率，以一定概率接受比当前解

更差的解，即在局部最优解能概率性地跳出并最终趋于全局最优，从而避免陷入局部最优[2]。模拟退火算法的具体思路如图 4 所示：

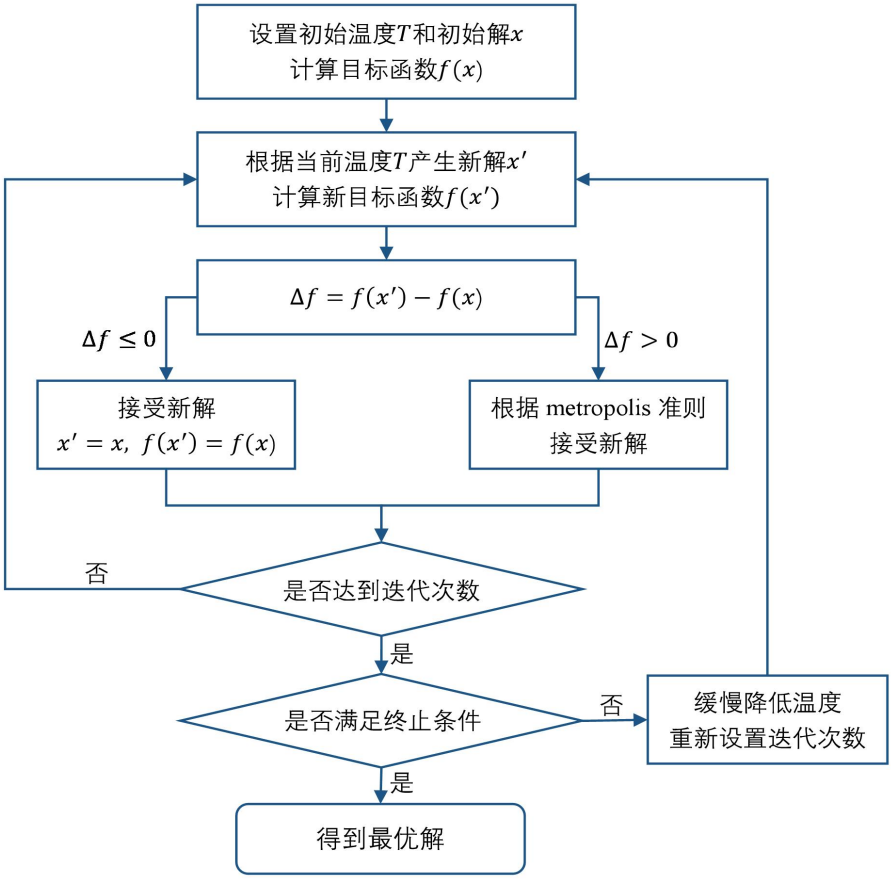


图 4 模拟退火算法流程图

关于流程图中部分内容的说明：

（1）Metropolis 准则

Metropolis 准则是一种有效的重点抽样法。其思想为：系统从一个当前能量状态变化到新的能量状态。若新的能量状态小于当前能量状态，则以概率 1 接受新的能量状态（取得局部最优）；若新的能量状态大于当前能量状态（全局搜索最优点），则以一定的概率接受或舍弃新的能力状态[3]。其数学性表示为：

$$p = \begin{cases} 1 & , \quad if\ E_{Tnew} < E_{Tcur} \\ \exp\left(-\dfrac{E_{Tnew} - E_{Tcur}}{T}\right), & if\ E_{Tnew} < E_{Tcur} \end{cases}$$

（其中E_{Tnew}表示当前温度 T 下新的状态能量，E_{Tcur}表示当前温度 T 下当前状态能量）

从方程可得，当新的能量状态大于当前状态能量时，温度越高，新状态的接受概率越高；当前状态的能量与新状态的能量差越高，新状态的接受概率越高。为避免所谓热力学中淬炼（quenching）的操作，控制参数 T 的值必须缓慢衰减。

（2）几个重要参数的选择

① 初始控制参数温度 T：

一般情况下采用随机生成一组可行解，以该解所对应的目标函数值的方差作为初温；利用经验或试验确定。

② 退温函数：

常用的退温函数有以下两种：

$$T_{n+1} = kT_n$$

$$T_{n+1} = T_n - \Delta T$$

其中 n 为当前循环次数，0<k<1 为一个非常接近 1 的常数，ΔT 为自定义温度下降值。

③ 内循环的循环次数：

每一个温度下的迭代次数相同，且迭代次数与具体问题有关。随着温度的下降，迭代次数应增加。

④ 算法终止准则：

主要包括以下三点：设置终止温度；设置最大迭代次数；算法搜索到的最优值连续若干步保持不变。

二、问题分析

2.1 问题总分析

本题为基于量子计算的物流配送问题，问题一及问题二均要求设计出最佳的物流配送方案，属于最优化问题。其中引入了量子计算技术以更好地进行物流方案设计，通过建立量子计算中的 QUBO 模型，而后代入基于相干伊辛机开发的 Kaiwu SDK 开发套件进行求解，得到最优物流方案，问题的关键点在于将问题的公式转化为 QUBO 形式，并调用 Kaiwu 库里的 CIM 模拟器和模拟退火求解器进行求解。问题的基本思路如图 1 所示：

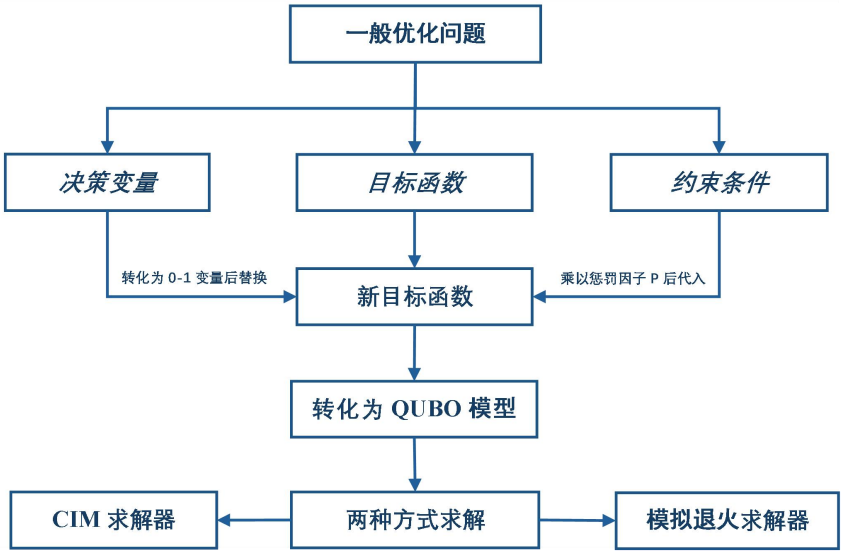


图 1 总体思路流程图

2.2 问题一的分析

针对问题一，判断其为优化问题。首先，通过观察与计算可得，存在两地之间直接运输的单趟成本高于经过另一地中转的单趟运输成本的情况，故而将各城市及其之间的

运输成本抽象为图中的点与权重，运用 Dijkstra 算法得到任意两点之间的最短路径和最短路径长度，从而得到卡车从城市i到城市j的运输总成本的最小值。而后通过对问题的分析，得到卡车 A、B 的最大租赁数量，将模型简化。接着，以最小化单个公司的运输成本为目标，将约束条件：①卡车载货量的重量限制；②存运货数量的等量关系；③对变量实际意义的约束转化为数学表达式，将其表示为一般优化模型，再通过对应关系，将其转化为 QUBO 模型，而后通过 python 程序编程，调用 Kaiwu SDK 库中的 CIM 模拟器和模拟退火求解器分别求解，得到最佳货车租赁方案、货物运输方案及航空运输的安排。再通过与一般优化模型中的遗传算法与贪心算法得到的结果及运算时间进行比较，证明本题所用的 QUBO 模型的先进性。

2.3 问题二的分析

针对问题二，判断其为与问题一类似的优化问题。基于问题一中对于最短路径的处理，增加公司一、二可在途中进行拼货运输的条件，则在运输过程中任一卡车上的货物可能含公司一或公司二的，也可能同时包含两公司的货物，即用$q_{ij,n}^{K,M}$表示公司M从城市i到城市j通过卡车 K 所运载的货物数量，在运输过程中，M可取 1 和 2。由于公司间拼货条件的增加，对于卡车 A 最大租赁数量的限制有所改变，进行新的数量分析，简化模型。本题的目标为最小化两公司总成本，约束条件除改变中途两公司间可以拼货的情况其余与问题一中的约束相同。而后将目标函数与约束条件转化为 QUBO 模型，判断出该模型的比特数较高，使用 SubQUBO 进行求解，调用 Kaiwu SDK 中的 CIM 模拟器和模拟退火求解器进行求解，得到最优安排。再分别计算问题一及问题二中两公司的运输成本总和，计算得出两公司合作下总体成本的减少量。

2.4 问题三的分析

针对问题三，其要求提出具有学术价值及商业化前景的场景。量子计算的优势之一是可以处理大规模的数据，考虑到此优势，通过对附件论文的研究及对资料的查询，本文将视野放至金融领域，对于银行在借款中所会面对的用户正常交纳利息及坏账的可能，选择对用户最佳的评价标准决定是否向该用户放贷，从而使银行获得最大利润。基于此问题背景列出公司收益的表达式，并将其转化为 QUBO 模型，并计算该模型所需的比特数量级。

三、模型假设

1. 假设每个城市有足够的可租赁卡车；
2. 假设货物可以暂存在城市中，由后续车辆将其运走；
3. 假设航空运输无论远近每吨运费皆相同，且能当日到达；
4. 假设问题一种公司一的货物运往小组一的城市，公司二的货物运往小组二的城市；
5. 假设运输天数与题目所给天数严格相等，不考虑交通、天气等不确定因素的影响；
6. 假设不考虑两公司相同城市的货仓间的距离；
7. 假设天数不足一天时均按照一天计算。

四、符号说明

符号	说明	单位
a_{ij}	卡车 A 从城市i到城市j的运输总成本	元
b_{ij}	卡车 B 从城市i到城市j的运输总成本	元
t_{ij}	卡车从城市i到城市j所需的运输天数	天
d_K	卡车 K 的日租金	元
e_{ij}	卡车从城市i到城市j的运输单趟成本	元
$x_{ij,\ n}^{K}$	第n辆K类型卡车是否参与城市i到城市j的运输$(i,j=1,\dots,6)$	/
$q_{ij,n}^{K,M}$	公司 M 卡车$x_{ij,n}^{K}$上运载的货物量$(i,j=1,\dots,6)$	吨
$c_{ij,M}$	公司 M 的航空运输量(此处$i=1,2,6;\ j=3,4,5$)	吨
C	航空运输每吨的成本(为常量 10000)	元/吨
T_{Mi}	公司 M 在出发城市i的初始货物量(此处$i=1,2,6$)	吨
D_{Mj}	公司 M 需运往到达城市j的货物量(此处$j=3,4,5$)	吨

五、模型建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 数据预处理

由题中所给卡车日租金、卡车单趟时间及单趟成本表可计算得到 A、B 两种卡车在不同地之间运送货物的总成本，以 A 卡车从i地运输货物到j地为例，即：

$$a_{ij}=t_{ij}d_A+e_{ij}$$

运用 Excel 公式编写，计算得到两地点间卡车直达运输的总成本，结果如表格 1 所示：

表 1 卡车 A 在各地间的直达运输总成本

	上海	西安	昆明	深圳	天津	郑州
上海	0	28500	56500	36500	28500	18500
西安	28500	0	38500	40500	20500	8500
昆明	56500	38500	0	17500	61500	49500
深圳	36500	40500	17500	0	50500	37500
天津	28500	20500	61500	50500	0	10500
郑州	18500	8500	49500	37500	10500	0

通过对表格中数据的观察和计算可得，将i地货物运送到j地的过程中，存在比两地间直接运输更节约总成本的中转运输方式，即存在中转地v，使得：

$$a_{iv}+a_{vj}<a_{ij}$$

故而本文运用 Dijkstra 算法，不断更新最短路径和路径长度，更新得：

$$a_{ij} = a_{iv} + a_{vj}$$

最终得到任意两点之间的最短路径及路径长度a_{ij}，具体实现见附录一。为简化模型，此处地点i运输货物到地点j不考虑在中转地点v处的拼货情况。更新后的最短路径图如图 2、3 所示，最短路径矩阵如图 4 所示，最短路径长度即两地间最低运输总成本导出至 Excel 表后的结果如表 2、3 所示：

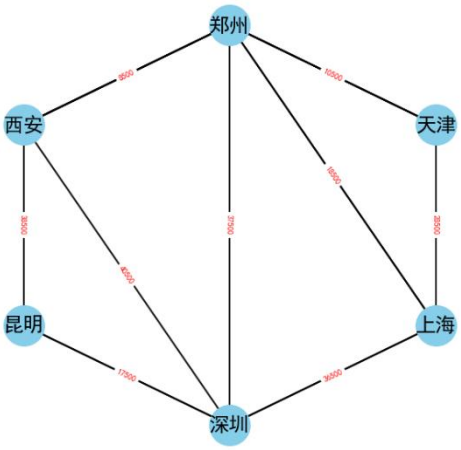


图 2 卡车 A 总费用最短路径图

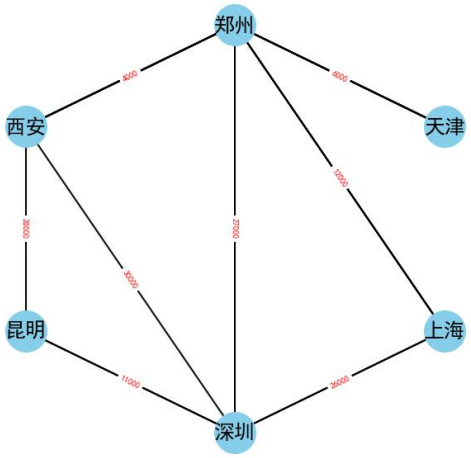


图 3 卡车 B 总费用最短路径图

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

图 4 最短路径矩阵

表 2 卡车 A 在各地间的最低运输总成本

	上海	西安	昆明	深圳	天津	郑州
上海	0	28500	54000	36500	28500	18500
西安	28500	0	38500	40500	19000	8500
昆明	54000	38500	0	17500	61500	47000
深圳	36500	40500	17500	0	50500	37500
天津	28500	19000	61500	50500	0	10500
郑州	18500	8500	47000	37500	10500	0

表 3 卡车 B 在各地间的最低运输总成本

	上海	西安	昆明	深圳	天津	郑州
上海	0	16000	37000	26000	18000	12000
西安	16000	0	28000	30000	10000	4000
昆明	37000	28000	0	11000	38000	32000
深圳	26000	30000	11000	0	33000	27000
天津	18000	10000	38000	33000	0	6000
郑州	12000	4000	32000	27000	6000	0

而后为了衡量最短路径的准确性，本文运用 Floyd 算法进行检验，通过比较得到两种算法的结果相同，故而认为所得结果即为最短路径。Floyd 算法的具体实现见附录 2。

5.1.2 构建数学模型和 QUBO 模型

一、模型抽象及简化

1．将城市抽象为字母

依题意，城市域 J={上海，西安，昆明，深圳，天津，郑州}，按顺序分别用数字 1-6 表示。其中上海、西安、郑州为货物当前所在城市，即出发城市，用T_{Mi}表示公司M在出发城市i的初始货物量，故此处$i=1,2,6$；昆明、深圳、天津为货物需要运往的城市，即到达城市，用D_{Mj}表示公司M需运往到达城市j的货物量，故此处$j=3,4,5$。由于拼货情况的存在，故每一个城市都可能作为发货点及收货点，设$x_{ij,n}^{K}$表示第n辆K类型卡车对于城市i到城市j的运输的参与情况，若参与运输则取 1，若无参与则取 0，并用$q_{ij,n}^{K,M}$表示公司 M中卡车$x_{ij,n}^{K}$上运载的货物量，此时$i,j=1,2,...,6$。

2．对$x_{ij,n}^{K}$进行分析

(1) $x_{ij,n}^{K}$表示货车 K 经最优路线由i城市发出到达j城市，使得运输成本达到最低，由最短路径矩阵可知，该路线可能会途径其他城市v，但该模型认为 K 货车在此运输过程不在v城市做停留。

(2) 对于 n：

① $K=A$时

由于到达城市中对于货量的最大需求为 27 吨，卡车 A 的最大载重量为 12 吨，派用两辆卡车 A 后还剩 $27-2\times12=3$（吨）＜5（吨）的货物没有运输，此为用两辆卡车 A 后所剩货物量最多的情况，而此最大情况所剩的货物量都较小，此时使用卡车 B 或航空运输运送剩余部分的成本相较于使用卡车 A 的成本更低，故使用卡车 A 的最大数量为 2，即此时$n=1$，2。

② $K=B$时

由于两辆卡车 B 的最大运输量为 10 吨，小于一辆卡车 A 的最大运输量 12 吨，但两辆卡车 B 的租金大于一辆卡车 A 的租金，又因单趟运输成本相同，故有 $2b_{ij}<a_{ij}$，故租两辆卡车 B 的方案差于租一辆卡车 A 的方案，故不考虑租两辆卡车 B 及以上的情况，故所租卡车 B 的最大数量为 1，即此时$n=1$。

二、构建优化模型

由于本题要求分别求得公司一、二的最优运输安排，故以下仅表示出公司一的最优运输安排的求解过程，公司二的情况仅改变出发城市与最终收货城市的货量，其余处理方式相同。

（一） 决策变量

1. 卡车运输的决策变量

用$x_{ij,n}^{K}$表示第n辆卡车K是否参与城市i到城市j的运输，是则取 1，不是则取 0。

则$x_{ij,n}^{K}$，即卡车 A、B 的运输安排共同影响最终的运输成本。

2．航空运输的决策变量

除卡车运输外，还可进行航空运输，用$c_{ij,1}$表示公司一从城市i到城市j的航空运输量，其也是影响最终运输成本的因子之一。

（二）目标函数

本题目标为最小化运输成本，而运输成本由卡车运输与航空运输的成本构成，故而得到下式目标函数：

$$min \sum_{n}\sum_{i}\sum_{j} a_{ij}\, x_{ij,n}^{A} + \sum_{i}\sum_{j} b_{ij} x_{ij,1}^{B} + C\sum_{i}\sum_{j} c_{ij,1} \quad (n = 1,2)$$

（三）约束条件

1．对卡车载货量的约束：

由卡车 A 的最大载货量为 12 吨，卡车 B 的最大载货量为 5 吨，且载货量不小于 0，得以下二式：

$$0 \le x_{ij,n}^{A} q_{ij,n}^{A,1} \le 12 \quad (n = 1,2)$$

$$0 \le x_{ij,1}^{B} q_{ij,1}^{B,1} \le 5$$

2．对各城市存、运货物数量的约束：

因假设公司一的货物运往小组一的城市，公司二的货物运往小组二的城市，而公司一所含货物量与小组一所需货物量相等，公司二所含货物量与小组二所含货物量相等，故公司一、二的货物需全部运出，分别送至小组一和小组二，得以下等式约束：

$$T_{mi} = \sum_{j}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,1} x_{ij,n}^{K} - \sum_{j}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,1} x_{ji,n}^{K} + \sum_{j} c_{ij,1}$$

$$D_{mj} = \sum_{i}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,1} x_{ji,n}^{K} - \sum_{i}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,1} x_{ij,n}^{K} + \sum_{i} c_{ij,1}$$

$$(m = 1,2;\ K = A,B;\ 当K = A\ 时, n = 1,2;\ 当K = B\ 时, n = 1)$$

3．对卡车运输的约束：

$x_{ij,n}^{K}$表示第n辆卡车K是否参与i地到j地的货物运输,为 0-1 变量，即：

$$x_{ij,n}^{K} \in \{0，\ 1\}$$

具体表示为 $x_{ij,n}^{K} = \begin{cases} 1\ ,第n辆卡车K参与了i地到j地的货物运输 \\ 0\ ,第n辆卡车K没参与i地到j地的货物运输 \end{cases}$

4. 对航空运输的约束：

航空运输的数量必定为正值，故得到如下约束：

$$z_{ij} \ge 0$$

综合决策变量、目标函数、约束条件三点，可将所求问题转化为以下模型：

$$min \sum_{n}\sum_{i}\sum_{j} a_{ij}\, x_{ij,\ n}^{A} + \sum_{i}\sum_{j} b_{ij} x_{ij,1}^{B} + C\sum_{i}\sum_{j} c_{ij,1} \quad (n = 1,2)$$

$$s.t.\begin{cases} 0 \le x_{ij,1}^{B} q_{ij,1}^{B,1} \le 5 \\ 0 \le x_{ij,n}^{A} q_{ij,n}^{A,1} \le 12 \quad (n = 1,2) \\ T_{mi} = \sum_{j}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,1} x_{ij,n}^{K} - \sum_{j}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,1} x_{ji,n}^{K} + \sum_{j} c_{ij,1} \\ D_{mj} = \sum_{i}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,1} x_{ij,n}^{K} - \sum_{i}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,1} x_{ji,n}^{K} + \sum_{i} c_{ij,1} \\ x_{ij,n}^{K} \in \{0，1\} \\ c_{ij,1} \ge 0 \end{cases}$$

$$(m = 1,2;\ K = A,B;\ 当K = A\ 时, n = 1,2;\ 当K = B\ 时, n = 1)$$

公司二的处理方法相同，仅改变初始数据。

三、将优化模型转化为 QUBO 模型

对于目标函数中的变量$x_{ij,\ n}^{A}$与$x_{ij,\ n}^{B}$，其已为二进制变量，无需进行转化；而c_{ij}为非二进制变量，故对其进行离散化处理，使其变为二进制变量。

对于约束条件

$$\begin{cases} 0 \le x_{ij,1}^{B} q_{ij,1}^{B,1} \le 5 \\ 0 \le x_{ij,n}^{A} q_{ij,n}^{A,1} \le 12 \quad (n = 1,2) \\ T_{mi} = \sum_{j}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,1} x_{ij,n}^{K} - \sum_{j}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,1} x_{ji,n}^{K} + \sum_{j} c_{ij} \\ D_{mj} = \sum_{i}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,1} x_{ij,n}^{K} - \sum_{i}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,1} x_{ji,n}^{K} + \sum_{i} c_{ij} \\ x_{ij,n}^{K} \in \{0，1\} \\ c_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

对于等式约束，可将其移到等式一边，再转化为平方形式，将转化后的等价约束乘以一个较大的惩罚量 P 加入目标函数中。对于不等式约束，首先向不等式约束中引入松弛变量将其转化为等式约束，而后同上述方法处理。

为了使记法与应用程序保持一致，本文首先将对于变量进行重新编号，具体如下：

$$\left(x_{12,1}^{A}, x_{12,2}^{A}, x_{12,1}^{B}, \ldots\ldots, x_{65,1}^{B}\right) = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{90})$$

故 QUBO 模型的转化如下：

$$\min \sum_{n}\sum_{i}\sum_{j} a_{ij}\, x_{ij,\ n}^{A} + \sum_{i}\sum_{j} b_{ij} x_{ij,1}^{B} + C\sum_{i}\sum_{j} c_{ij,1}$$
$$- \sum_{i=1,2,6} P\left(\sum_{j}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,1}\, x_{ij,n}^{K} - \sum_{j}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,1}\, x_{ji,n}^{K} + \sum_{j} c_{ij} - T_{mi}\right)^{2}$$
$$- \sum_{j=3,4,5} P\left(\sum_{j}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,1}\, x_{ij,n}^{K} - \sum_{j}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,1}\, x_{ji,n}^{K} + \sum_{j} c_{ij} - D_{mj}\right)^{2}$$
$$- \sum_{i}\sum_{j} P\left(x_{ij,n}^{A} q_{ij,n}^{A} + x_{91} + 2x_{92} + 4x_{93} - 12\right)^{2}$$
$$- \sum_{i}\sum_{j} P\left(x_{ij,n}^{B} q_{ij,n}^{B} + x_{94} + 2x_{95} - 5\right)^{2}$$

又因$x = \{0,1\}$，故有$x^2 = x$，

故上式可转化为 QUBO 模型的标准形式：

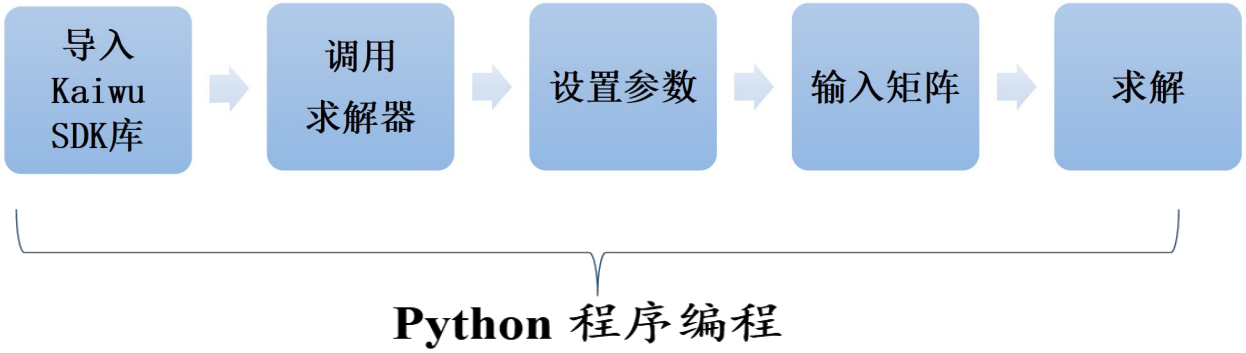
$$\min\ x^T Q x + c_0$$

其中c_0为一常数。

5.1.3 模型的求解

（1）调用 CIM 模拟器和模拟退火求解器

使用 CIM 模拟器和模拟退火求解器对 QUBO 模型问题的求解思路大致相同，如图所示：



通过程序运行得到结果，对比得两种求解器所得结果相同，结果如表 4、表 5 所示：

表 4 公司一最优方案

公司一最优货车租赁方案和货物运输方案（吨）							
发货地 \ 收货地	上海	西安	昆明	深圳	天津	郑州	成本（元）
上海				A(12)，A(7)			73000
西安			A(12)，A(7)	飞（1）			87000
昆明							
深圳							
天津							
郑州				B(5)	A(7)		37500
总成本（元）	197500						

表 5 公司二最优方案

公司二最优货车租赁方案和货物运输方案（吨）							
收货地 / 发货地	上海	西安	昆明	深圳	天津	郑州	成本（元）
上海			飞（1）	A(12)	飞（1）		56500
西安			A(12)，A(12)				77000
昆明							
深圳			B(2)				17500
天津							
郑州					A(12)，A(6)		21000
总成本（元）	172000						

以上两表格中，A(a)表示通过 A 货车运载 a 吨货物，从发货地发往收货地；B(b)表示通过 B 货车运载 b 吨货物，从发货地发往收货地；飞(c)表示通过航空运输的方式运载 c 吨货物，从发货地发往收货地。具体代码实现见附录 3。

（2）贪心算法

贪心算法的基本思路是从问题的某一个初始解出发一步一步地进行，根据某个优化测度，每一步都要确保能获得局部最优解。每一步只考虑一个数据，其选取应该满足局部优化的条件。若下一个数据和部分最优解连在一起不再是可行解时，就不把该数据添加到部分解中，直到把所有数据枚举完，或者不能再添加算法停止。[4]

本问题运用贪心算法的基本步骤如下：

Step1) 初始化： 创建两个列表，分别存储公司一和公司二的运输方案，初始为空。

Step2) 循环遍历： 遍历所有可能的运输路径，计算每条路径的运输成本。

Step3) 选择最优路径： 在每轮循环中，选择运输成本最低的路径作为当前公司的运输方案，并将该路径的成本累加到总成本中。

Step4) 更新剩余货物量： 更新出发城市和到达城市的剩余货物量。

Step5) 重复步骤 2-4： 直到所有货物都被运输完毕。

Step6) 输出结果： 输出公司一和公司二的运输方案以及总成本。

该算法（具体实现见附录 6）所得最终结果与（1）中调用 CIM 模拟器和模拟退火求解器所得结果一致。

（3）遗传算法

遗传算法是模拟达尔文生物进化论的自然选择和遗传学机理的生物进化过程的计算模型，是一种通过模拟自然进化过程搜索最优解的方法。该算法通过数学的方式,利用计算机仿真运算,将问题的求解过程转换成类似生物进化中的染色体基因的交叉、变异等过程。在求解较为复杂的组合优化问题时,相较于常规的优化算法,通常能够较快地获得较好的优化结果[5]。

本问题运用遗传算法的基本步骤如下：

Step1) 编码：将运输方案编码成染色体，例如每个染色体可以表示为 [i, j, k, n]，其中 i 和 j 分别表示出发城市和到达城市，k 和 n 的组合分别表示公司一和公司二使用的卡车类型。

Step2) 初始种群：随机生成一定数量的初始种群，每个种群代表一个运输方案。

Step3) 适应度函数：定义适应度函数，计算每个染色体的运输成本，运输成本越低，适应度越高。

Step4) 选择：根据适应度函数，选择一定数量的优秀染色体作为下一代种群的父代。

Step5) 交叉：对父代染色体进行交叉操作，产生新的染色体。
Step6) 变异：对新的染色体进行变异操作，增加种群的多样性。
Step7) 迭代：重复步骤 4-6，直到达到终止条件，例如迭代次数达到上限或适应度函数值不再提升。

该算法（具体实现见附录 7）所得最终结果与（1）中调用 CIM 模拟器和模拟退火求解器所得结果一致。

5.1.4 问题一模型检验

一、各种求解方法之间的比较

表 6 公司一最小总成本求解结果比较

求解器	最小总成本	迭代次数	迭代时间
CIM 求解器	197500	10	25.765423s
模拟退火求解器	197500	10	24.369785s
贪心算法	197500	15	60.4605s
遗传算法	197500	20	80.4964s

表 7 公司二最小总成本求解结果比较

求解器	最小总成本	迭代次数	迭代时间
CIM 求解器	172000	10	23.469723s
模拟退火求解器	172000	10	24.134389s
贪心算法	172000	15	59.7645s
遗传算法	172000	20	81.6794s

二、QUBO 模型与非量子化算法的对比

根据所列出的最优化问题的目标函数与约束条件，本文还使用遗传算法及贪心算法进行求解（具体实现见附录 6、7），将这两者优化方案与转化为 QUBO 模型利用量子计算技术所得结果进行比较，发现后者的运算速度高于前者，故证明了此题所运用的 QUBO 模型的优越性。具体表现中的优缺点如表格所示：

	QUBO 模型	遗传算法	贪心算法
优点	计算速度快、精度高	有较强的全局搜索能力	时间复杂度低
缺点	技术潜力仍待挖掘	大规模问题求解受限	可能陷入局部最优
优化效果比较	QUBO 模型>遗传算法>贪心算法		

5.2 问题二模型的建立与求解

5.2.1 问题二模型建立

一、模型抽象及简化

1. 抽象为数学模型

具体符号及字母的设置同问题一中做法。

2．对$x_{ij,n}^{K}$的分析

(1) $x_{ij,n}^{K}$表示货车 K 经最优路线由i城市发出到达j城市，使得运输成本达到最低，由最短路径矩阵可知，该路线可能会途径其他城市v，但该模型认为 K 货车在此运输过程不在v城市做停留。

(2) 对 n 的分析

① $K = A$时

由于该小问中允许公司间拼货形式的存在，故两公司为合作关系，可共同完成小组一及小组二中所需货物量的运输，计算的出货单个到达城市中对于货量的最大需求为 46 吨，卡车 A 的最大载重量为 12 吨，4×12 = 48 > 46，故使用卡车 A 的最大数量为 4，即此时$n = 1, 2, 3, 4$。

② $K = B$时

与问题一中分析相同，即此时$n = 1$。

二、构建优化模型

（一）决策变量

与问题一的决策变量相同，即卡车运输的二进制决策变量$x_{ij,n}^{K}$与航空运输的决策变量及航空运输量$c_{ij,M}$，其中$i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}, m = 1,2; K = A, B;$ 当$K = A$ 时$, n = 1,2,3,4;$ 当$K = B$ 时$, n = 1$。

（二）目标函数：

最终目标是使得两公司的运输总成本最低，即目标函数为：

$$min \sum_{n}\sum_{i}\sum_{j} a_{ij}\, x_{ij,\ n}^{A,M} + \sum_{i}\sum_{j} b_{ij} x_{ij,1}^{B} + C\sum_{M}\sum_{i}\sum_{j} c_{ij,M}$$

（三）约束条件：

1. 对卡车运载货物数量的约束：

$$0 \le \sum_{M} x_{ij,n}^{A} q_{ij,n}^{A,M} \le 12 \quad (n = 1,2,3,4; M = 1,2)$$

$$0 \le \sum_{M} x_{ij,1}^{B} q_{ij,1}^{B,M} \le 5 \quad (M = 1,2)$$

（其中$q_{ij,n,m}^{K,M}$表示公司 M 从城市i到城市j通过卡车 K 所运载的的货物数量）

2. 各城市存、运货物数量约束：

$$T_{mi} = \sum_{j}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,M}\, x_{ij,n}^{K} - \sum_{j}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,M}\, x_{ji,n}^{K} + \sum_{j} c_{ij,M}$$

$$D_{mj} = \sum_{i}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,M}\, x_{ij,n}^{K} - \sum_{i}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,M}\, x_{ji,n}^{K} + \sum_{i} c_{ij,M}$$

$$(n = 1,2,3,4; M = 1,2)$$

T_{Mi}表示公司M在出发城市i的初始货物数量(此处$i = 1,2,6$)；D_{Mj}表示公司M需运往到达城市j的货物数量(此处$j = 3,4,5$)。

其余对卡车运输的约束及对航空运输的约束同问题一。

综合决策变量、目标函数、约束条件三点，可将所求问题转化为以下模型：

$$min \sum_{n}\sum_{i}\sum_{j} a_{ij}\, x_{ij,\ n}^{A,M} + \sum_{i}\sum_{j} b_{ij} x_{ij,1}^{B} + C\sum_{M}\sum_{i}\sum_{j} c_{ij,M}$$

$$s.t.\begin{cases} 0 \le \sum_{M} x_{ij,n}^{A} q_{ij,n}^{A,M} \le 12 \quad (n = 1,2,3,4; M = 1,2) \\ 0 \le \sum_{M} x_{ij,1}^{B} q_{ij,1}^{B,M} \le 5 \quad (M = 1,2) \\ T_{mi} = \sum_{j}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,M}\, x_{ij,n}^{K} - \sum_{j}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,M}\, x_{ji,n}^{K} + \sum_{j} c_{ij,M} \\ D_{mj} = \sum_{i}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,M}\, x_{ij,n}^{K} - \sum_{i}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,M}\, x_{ji,n}^{K} + \sum_{i} c_{ij,M} \\ x_{ij,n}^{K} \in \{0，\ 1\} \\ c_{ij,M} \ge 0 \end{cases}$$

$$(m = 1,2;\ K = A, B;\ 当 K = A\ 时, n = 1,2,3,4;\ 当 K = B\ 时, n = 1)$$

三、转化为 QUBO 模型

处理过程与上一问相同，首先，为使记法与应用程序保持一致，首先对于变量进行重新编号，具体如下：

$$\left(x_{12,1}^{A}, x_{12,2}^{A}, x_{12,3}^{A}, x_{12,4}^{A}, x_{12,1}^{B} \ldots\ldots, x_{65,1}^{B}\right) = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{150})$$

接着向不等式约束中加松弛变量转化为等式约束，再将等式约束乘以惩罚项加入目标函数中，转化得：

$$\begin{aligned} min & \sum_{n}\sum_{i}\sum_{j} a_{ij}\, x_{ij,\ n}^{A,M} + \sum_{i}\sum_{j} b_{ij} x_{ij,1}^{B} + C\sum_{m}\sum_{i}\sum_{j} c_{ij,m} \\ & - \sum_{i=1,2,6} P\left(\sum_{j}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,M}\, x_{ij,n}^{K} - \sum_{j}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,M}\, x_{ji,n}^{K} + \sum_{j} c_{ij,M} - T_{mi}\right)^2 \\ & - \sum_{j=3,4,5} P\left(\sum_{j}\sum_{K} q_{ij,n}^{K,M}\, x_{ij,n}^{K} - \sum_{j}\sum_{K} q_{ji,n}^{K,M}\, x_{ji,n}^{K} + \sum_{j} c_{ij,M} - D_{mj}\right)^2 \\ & - \sum_{i}\sum_{j} P\left(x_{ij,n}^{A} q_{ij,n}^{A,M} + x_{151} + 2x_{152} + 4x_{153} - 12\right)^2 \\ & - \sum_{i}\sum_{j} P\left(x_{ij,n}^{B} q_{ij,n}^{B,M} + x_{154} + 2x_{155} - 5\right)^2 \end{aligned}$$

又由$x^2 = x$，可将模型转化为 QUBO 标准形式，即：

$$\min\ x^T Q x + c_0$$

此时由于最后建立的 QUBO 模型比特数较高，故考虑将一个较大的 QUBO 模型分解成多个子模型（subQUBO）进行求解，这是一种用于提高优化算法效率和可解性的策略[6]。

subQUBO 模型具体求解步骤如下：

Step1)将原问题的 QUBO 模型分解成多个 subQUBO 模型每个 subQUBO 模型只包含一部分的决策变量和约束条件。

Step2)定义 subQUBO 模型的决策变量、约束条件、目标函数。

Step3)使用 Kaiwu SDK 的模拟退火求解器和 CIM 模拟器来求解每个 subQUBO 模型。

Step4)更新原问题的解，根据每个 subQUBO 模型的最优解，更新原问题的解。

Step5)重复步骤 2 至步骤 4，直到所有 subQUBO 模型都被求解并更新了原问题的解。

5.2.2 问题二模型求解

(1)调用 CIM 模拟器和模拟退火求解器

利用 Kaiwu SDK 库中的 CIM 模拟器和模拟退火求解器进行求解，得到结果如表格 8 所示：

表 8 两公司合作运营时最优方案

两公司合作运营时最优的货车租赁方案和货物运输方案（吨）							
发货地 \ 收货地	上海	西安	昆明	深圳	天津	郑州	成本（元）
上海				A(12,0)，A(7,5)		A(0,9)	91500
西安			A(12,0),A(7,3) A(0,12),A(0,12)			B(1,0)	158000
昆明							
深圳							
天津							
郑州		B(0,3)		A(6,5)	A(0,12),A(7,5) B(0,2)		68500
总成本（元）	318000						

上表中，A(a1，a2)表示通过 A 货车运载一公司 a1 吨货物，二公司 a2 吨货物，从发货地发往收货地；B(b1，b2)表示通过 B 货车运载一公司 b1 吨货物，二公司 b2 吨货物，从发货地发往收货地；飞(c1，c2)表示通过航空运输的方式运载一公司 c1 吨货物，二公司 c2 吨货物，从发货地发往收货地。

与问题一中所得方案相比，此问题中两公司合作运营时的方案节约总成本为：

$$197500 + 172000 - 318000 = 51500\text{（元）}$$

(2) 贪心算法

问题二可以分解为以下三个子问题：

①路径选择问题：选择最优的运输路径，使得运输成本最低。

②货物分配问题：将货物合理分配到每辆卡车上，确保卡车装载量不超过其最大载货量。

③拼货方案问题：确定两公司之间如何进行拼货，使得总成本最低。

此时贪心算法求解思路：

①针对路径选择问题：使用贪心算法选择最优的运输路径，参考问题一的贪心算法代码。

②针对货物分配问题：对于每条路径，使用贪心算法将货物分配到卡车上，优先分配载货量大的卡车。

③针对拼货方案问题：对于每条路径，比较两公司单独运输和拼货运输的成本，选择成本更低的方案。

(3) 遗传算法

同（2）将该问题分解为三个子问题。本问题的遗传算法求解思路：

Step1)编码： 将运输方案编码成染色体，例如每个染色体可以表示为 [i, j, k, n, p]，其中 i 和 j 分别表示出发城市和到达城市，k 和 n 的组合分别表示公司一和公司二使用的卡车类型，p 表示是否拼货（0 表示不拼货，1 表示拼货）。

Step2)初始种群： 随机生成一定数量的初始种群，每个种群代表一个运输方案。

Step3)适应度函数： 定义适应度函数，计算每个染色体的运输成本，运输成本越低，适应度越高。

Step4)选择： 根据适应度函数，选择一定数量的优秀染色体作为下一代种群的父代。

Step5)交叉： 对父代染色体进行交叉操作，产生新的染色体。

Step6)变异： 对新的染色体进行变异操作，增加种群的多样性。

Step7)迭代： 重复步骤 4-6，直到达到终止条件，例如迭代次数达到上限或适应度函数值不再提升。

5.2.3 问题二模型检验

该小问同样使用贪心算法及遗传算法进行求解（具体实现见附录 10、11），将这两种算法所得结果及迭代效果与用 CIM 求解器及模拟退火求解器得到的结果进行比较，结果如表 9 所示：

表 9 两公司最小总成本求解结果比较

求解器	最小总成本	迭代次数	迭代时间
CIM 求解器	318000	30	55.526729s
模拟退火求解器	318000	30	53.945355s
贪心算法	318000	53	150.4113s
遗传算法	318000	55	183.5762s

可得使用 CIM 求解器及模拟退火求解器的求解最终结果与贪心算法及遗传算法的结果相同，但在迭代次数及迭代时间上展现出其优越性，故认为该模型良好。

5.3 问题三的模型

5.3.1 问题背景及实际意义

在银行信用卡或相关的贷款等业务中，对客户授信之前，需要先通过各类审核规则对客户的信用等级进行评定，只有通过评定的客户才能获得信用卡或贷款资格。而该审核规则过程实际是经过一重或者多重组合规则后对客户进行评分，将其称为信用评分卡。每个信用评分卡有多种阈值设置（但其中有且仅有一个阈值生效），不同的信用评分卡在不同的阈值下，对应着不同的通过率和坏账率。一般通过率越高，坏账率也会越高，反之，通过率越低，坏账率越低。[7]

对银行来说，通过率越高，通过贷款资格审核的客户数量就越多，相应的银行理论上从客户手中获得的利息收入就会越多，但高通过率就意味着高坏账率，而坏账意味着放贷资金损失的风险，因此银行最终的收入可以定义为：

$$\text{最终收入} = \text{贷款利息收入} - \text{坏账损失}$$

下表为查询资料[8]所得的部分信用评分卡及其对应的 10 个阈值，以及相应阈值对应的不同的坏账率和通过率的表格：

信用评分卡 1			信用评分卡 2			信用评分卡 3		
阈值	通过率	坏账率	阈值	通过率	坏账率	阈值	通过率	坏账率
1	6%	0.60%	1	7%	0.55%	1	4%	0.65%
2	13%	1.20%	2	12%	1.10%	2	14%	1.20%
3	26%	1.70%	3	24%	1.60%	3	22%	1.65%
4	37%	2.30%	4	35%	2.10%	4	34%	2.15%
5	44%	2.60%	5	47%	2.30%	5	45%	2.65%
6	52%	3.10%	6	54%	2.60%	6	53%	3.25%
7	63%	3.60%	7	68%	3.30%	7	66%	3.65%
8	76%	4.10%	8	71%	4.20%	8	74%	4.20%
9	81%	4.60%	9	86%	4.80%	9	85%	4.60%
10	93%	5.20%	10	91%	5.10%	10	97%	5.05%

本问的目标在 m 张信用评分卡中找出 1 张及一定的阈值，使得银行的借款业务得到最高收入。

5.3.2 符号设计

符号	说明	单位
A	贷款资金	元
q	银行贷款利息收入率	/
A_i	信用卡i的通过率	/
B_i	信用卡i的坏账率	/
x_i	是否采用第i张信用卡（是取 1，不是取 0）	/

5.3.3 模型建立与求解

对于该问题，首先将问题等价转化为从 10m 张信用评分卡中找出一张信用卡，即将原问题中一张信用卡对应十个阈值转化为每一张信用评分卡对应一个阈值，从而实现模型的简化。将银行的最终收入转化为数学表达式得：

$$Aq\sum_{i=1}^{10m}A_ix_i(1-\sum_{i=1}^{10m}B_ix_i)-A\sum_{i=1}^{10m}A_ix_i\sum_{i=1}^{10m}B_ix_i$$

$$=\sum_{i=1}^{10m}(A_ix_i)\left(Aq-(A+Aq)\sum_{i=1}^{10m}B_ix_i\right)$$

$$=-(A+Aq)\sum_{i=1}^{10m}B_ix_i\sum_{i=1}^{10m}A_ix_i+Aq\sum_{i=1}^{10m}A_ix_i$$

本问目标是求得上式的最大值以达到最大利益，将上式取负后转化为求最小值问题，得到**目标函数**为：

$$(A+Aq)\sum_{i=1}^{10m}B_ix_i\sum_{i=1}^{10m}A_ix_i-Aq\sum_{i=1}^{10m}A_ix_i$$

由于最终只取唯一一张信用卡，故得到**约束条件**为：

$$\sum_{i=1}^{10m}x_i=1$$

该约束条件等价于：

$$(\sum_{i=1}^{10m}x_i-1)^2=0$$

转化为 **QUBO 表达式**为：

$$\min\ (A+Aq)\sum_{i=1}^{10m}B_ix_i\sum_{i=1}^{10m}A_ix_i-Aq\sum_{i=1}^{10m}A_ix_i+P(\sum_{i=1}^{10m}x_i-1)^2$$

其中 P 为惩罚项。

为了计算该模型中的比特数量级，我们需要确定模型中涉及的变量数量。根据模型假设，我们有 m 张信用评分卡，每张卡有 10 个阈值。因此，我们有 10m 个可能的阈值选择。因此：**比特数量级 = 210m**。

六、模型评价、改进与推广

6.1 模型的优点

1. 本文在构建优化模型前运用 Dijkstra 算法更新最短路径，实现更优，并用 Floyd 算法确定了其正确性。
2. 通过预处理数据分析得出卡车的最大数量，实现模型的简化。
3. 问题求解效率高: QUBO 模型能够利用量子计算的优势，在短时间内求解复杂优化问题，相较于传统算法具有显著的速度优势。
4. 结果精度高: QUBO 模型能够得到全局最优解或近似最优解，避免陷入局部最优，从而保证结果的精度和可靠性。
5. 模型适用性强: QUBO 模型可以应用于各种类型的组合优化问题，具有广泛的适用性。
6. 易于实现: 利用 Kaiwu SDK 等开发工具，可以方便地构建和求解 QUBO 模型，降低了量子计算技术的应用门槛。
7. 本文还通过贪心算法和遗传算法对 CIM 模拟器和模拟退火求解器的求解结果进行了比较验证，进一步证明了 QUBO 模型的优越性。

6.2 模型的缺点

1. 实际航空运输中的成本受距离的影响较大，而本文为简化模型将其设为一固定值。
2. 实际航空运输成本简化: 模型中将航空运输成本设为固定值，未考虑距离因素，与实际情况存在偏差。
3. 模型复杂度限制: 当问题规模较大时，QUBO 模型中的 Q 矩阵复杂度过高时会使算力减小，QUBO 模型的构建和求解可能会面临一定的挑战，需进一步采取 subQUBO 模型的分解。
4. 量子计算硬件限制: 目前量子计算机的规模和稳定性有限，限制了 QUBO 模型的实际应用范围。

6.3 模型的改进与推广

1、改进之处主要包括以下几点：

(1) 航空运输成本线性化: 可以根据距离对航空运输成本进行线性化处理，使模型更接近实际情况。
(2) 考虑时间窗约束: 可以在模型中加入时间窗约束，考虑卡车运输的时间限制，使模型更加完善。
(3) 考虑车辆维修保养: 可以在模型中加入车辆维修保养成本，使模型更加全面。

2、模型推广主要可以从以下几点考虑：

(1) 物流领域: 将模型应用于其他物流优化问题，如路径规划、库存管理、运输调度等。
(2) 金融领域: 将模型应用于金融优化问题，如投资组合优化、信用评分、风险管理等。
(3) 其他领域: 将模型应用于其他需要解决组合优化问题的领域，如生产调度、人员排班等。

七、参考文献

[1] Glover, F., Kochenberger, G., Hennig, R. *et al.* Quantum bridge analytics I: a tutorial on formulating and using QUBO models. *Ann Oper Res* **314**, 141–183 (2022).

[2] Kirkpatrick, S., Gelatt Jr, C. D. Vecchi, M. P. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598), 671-680(1983).

[3] Sunshing. 优化算法——模拟退火算法（Simulated Annealing, SA） https://blog.csdn.net/weixin_52721512/article/details/126497778/ 2024 年 4 月 24 日

[4] 常友渠,肖贵元,曾敏.贪心算法的探讨与研究[J].重庆电力高等专科学校学报,2008,13(3):40-424

[5] 郑树泉．工业智能技术与应用[M]．上海．上海科学技术出版社．2019．250-251

[6] Dury B, Di Matteo O. A QUBO formulation for qubit allocation[J]. arXiv preprint arXiv: 2009.00140, 2020.

[7] 陈粘. 高维金融市场的时变投资组合优化研究[D].成都理工大学,2021.

[8] 汪勇,孟香君,沈维萍.量子计算在经济与金融领域中的应用[J].经济学动态,2023(01):126-143.

选题	2024 年第十四届 APMCM 亚太地区大学生数学建模竞赛（中文赛项）	参赛编号
C 题		apmcm 24102422

基于量子计算的物流配送问题

摘要

随着电子商务的蓬勃发展，物流配送的复杂性和高效性要求日益提升。本文基于物流公司需应对多公司、多城市、多货物类型的复杂运输场景，基于 QUBO 模型研究物流公司物流配送最小化成本制定最优运输模型。首先，针对不同问题分别构建以最小化成本为目标的组合优化模型。其次，根据不同目标函数形式，通过采用启发式方法等数学技巧进行转换，转换成 QUBO 形式，并运用量子退火算法并通过 Kaiwu SDK 进行问题求解出使得最终成本最小化时的组合货车租赁方案。最后，本文运用罚函数对量子退火算法的结果进行对比检验分析，凸显量子退火算法优越性并总结不同算法优劣及适用场景我们综合了前三段的研究成果，强调了量子计算在物流优化与人工智能模型超参数调优中的重要作用。同时，将量子计算应用于人工智能模型的超参数调优，进一步展示了其在提升模型性能、加速科研进程方面的巨大潜力。

针对问题一：两个物流公司独立运营且拼货只在公司内部，以最小化单个物流公司运营成本为目标建立 QUBO 模型，使用 Kaiwu SDK 中的 CIM 模拟器和模拟退火求解器分别求解。**计算得出租赁 1 辆卡车 a 和 2 辆卡车 b 时总成本最小，经罚函数灵敏度分析确定罚参数并通过贪心算法检验结果合理性，**最终确定租赁 1 辆卡车 a 和 2 辆卡车 b 为货车租赁的最优方案及相应货物运输方案。

针对问题二：在问题一基础上修改参数，考虑运输成本等因素建立目标函数和约束条件，再进行物流转运中心选址以达到最短路径降低成本的目的。**运用数学规划方法和改进麻雀优化算法，使用 subQUBO 模型和量子退火算法，通过 KaiwuSDK 求解货物运输方案和成本，迭代确定最优物流中心坐标。**随机抽样比较总成本以验证量子退火算法的优越性，最终通过 subQUBO 方法和模拟退火算法得出卡车租赁和货物运输的最优方案及相关成本信息。

针对问题三：选取“人工智能模型超参数调优”场景，以超参数为决策变量、模型性能度量为目标函数构建 QUBO 模型，引入二进制变量并设计目标函数及引入惩罚因子，期望通过量子计算实现优化速度、超参数调整、高维空间问题解决、局部最优解克服等，通过数据探究得到 QUBO 求解算法在不同参数配置下的准确度分布情况，准确率总体较高且有变动。计算得出，**引入量子计算至 AI 超参数调优可以加速搜索过程，缩短调优时间，并精准定位最优超参数以提升模型性能与泛化能力。其特别优势在于有效处理高维空间优化难题，克服传统算法的局限，同时增强全局搜索能力，避免局部最优陷阱，增强模型稳定性。**

关键词：物流配送、量子计算、QUBO 模型、KaiwuSDK、CIM 模拟器、模拟退火求解器、subQUBO 模型、物流转运中心选址、麻雀优化算法、人工智能模型超参数调优。

目录

一、问题重述 1
1.1 研究背景 1
1.2 问题重述 1
二、问题分析 1
2.1 问题一的分析 1
2.2 问题二的分析 2
2.3 问题三的分析 2
三、模型假设 2
四、符号说明 2
五、问题一模型的建立与求解 3
5.1 模型的建立 4
5.1.1QUBO 模型 4
5.1.2QUBO 模型的建立 5
5.1.3 罚函数灵敏度分析 6
5.2 模型的求解 7
5.2.1 量子计算 7
5.2.2 算法设计与求解 8
5.2.3 问题一的求解与最优方案 8
5.3 最优方案 8
5.3.1 货车租赁方案 8
5.3.2 货物运输方案 8
六、问题二模型的建立与求解 9
6.1 模型的建立 9
6.1.1QUBO 模型的建立 9
6.1.2 罚函数灵敏度分析 9
6.1.3 物流转运中心选址 10
6.1.4 改进麻雀优化算法 11
6.2 模型的求解 13
6.2.1subQUBO 模型的求解 13
6.2.2 罚函数灵敏度分析 13
6.2.3 物流转运中心选取 14
6.2.4 最优化成本 15
6.3 复杂组合成本最优化方案 15
6.3.1 货车租赁方案 15
6.3.2 货物运输方案 16
七、问题三模型的建立与求解 16
7.1 人工智能模型超参数调优的 QUBO 模型 16
7.1.1 人工智能超参调优应用 16
7.1.2 背景信息 17
7.1.3 研究方法 17
7.1.4 思路及技术路线 17
7.1.5QUBO 模型设计 17
7.2 研究结果 18
7.2.1QUBO 模型算法 18
7.2.2 超参数调优 QUBO 模型 18
七、模型的评价与推广 19
7.1 模型的优点 19
7.2 模型的缺点 19
7.3 模型的推广 20
参考文献 21
附录 22

一、问题重述

1.1 研究背景

随着电商的蓬勃发展，物流配送需求激增，物流公司与电商平台紧密合作以应对挑战。面对庞大的货物量与多样化的目的地，传统物流优化方法显得力不从心。为此，物流公司探索采用量子计算技术这一前沿解决方案，旨在自动化计算运输综合策略[1]。量子计算凭借其强大的计算能力，有望为物流公司提供更精准、高效的路线规划与运输方式选择，确保货物准时送达，同时优化成本结构。此举不仅能显著提升物流效率，降低运营成本，还能增强消费者的购物体验与满意度，为电商行业的持续发展注入新动力。

借助量子计算技术来解决物流配送中的优化问题具有极其重要的现实意义和深远的应用价值[2]。它能够为物流公司提供更为科学、高效的决策支持，有力地推动物流行业朝着更加智能化、高效化的方向发展。这不仅有助于提升物流公司的竞争力，还能为整个电商行业的繁荣发展提供坚实的保障。

1.2 问题重述

问题一：假设两个物流公司独立运营，且拼货只发生在公司内部。以最小化单个物流公司的运营成本为目标，建立 QUBO 模型。使用 Kaiwu SDK 中的 CIM 模拟器和模拟退火求解器分别进行求解，为两个物流公司分别设计出货车租赁方案和货物运输方案。

问题二：当两个物流公司之间进行合作运营时，公司之间可以拼货运输，此时的优化目标为最小化两个公司的总成本。运用 Kaiwu SDK 中的 CIM 模拟器和模拟退火求解器来求解，给出最优的货车租赁方案和货物运输方案，并计算出合作运营带来的总体成本减少量。

问题三：自行提出一个具有商业化前景或学术价值的场景，该场景可以涉及 AI、通信、金融、生物医学、物流供应链管理等相关领域。需要给出相应的 QUBO 模型表达式，并计算模型所需的比特数量级（可以用相关参数表示）。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

在这个问题中，我们假设两个物流公司是独立运营的，并且拼货只在各自公司内部进行。我们的目标是最小化单个物流公司的运营成本。为了实现这个目标，我们需要建立一个 QUBO 模型。这个模型将考虑到各种因素，比如货物的起始位置、目的地、卡车的类型和载重、租赁时长、运输路线以及运输成本等。通过对这些因素的综合分析，我们可以确定最佳的货车租赁方案和货物运输方案。在建立模型的过程中，我们需要用合适的数学表达式来描述这些因素之间的关系，并且确保模型能够准确地反映实际情况。然后，我们使用 Kaiwu SDK 中的 CIM 模拟器和模拟退火求解器来求解这个模型[3]。这两个求解器将根据模型的设定，尝试找到最优的解决方案。通过这个过程，我们可以为每个物流公司设计出最合理的货车租赁和货物运输计划，从而在满足运输需求的同时，最大限度地降低运营成本。

2.2 问题二的分析

当两个物流公司决定合作运营时，情况就发生了变化。此时，公司之间可以进行拼货运输，我们的优化目标也变成了最小化两个公司的总成本。为了达到这个目标，我们同样需要建立一个 QUBO 模型。这个模型将考虑到两个公司的所有货物和运输需求，以及它们之间的协同合作方式。在模型中，我们需要考虑如何合理地安排货物的运输路径，如何充分利用拼货运输的优势，以及如何优化卡车的租赁和使用，以达到总成本最小化的目的。然后，我们使用 Kaiwu SDK 中的 CIM 模拟器和模拟退火求解器来求解这个模型[4]。通过这两个求解器的计算，我们可以找到最优的货车租赁方案和货物运输方案，使得两个公司的总成本降到最低。同时，我们还可以计算出合作运营带来的总体成本减少量，这将有助于我们评估合作的效益和优势。

2.3 问题三的分析

在这个问题中，我们需要自行提出一个具有商业化前景或学术价值的场景。这个场景可以涉及到多个领域，比如 AI、通信、金融、生物医学、物流供应链管理等。然后，我们需要为这个场景建立一个相应的 QUBO 模型表达式。在建立模型表达式时，我们需要深入分析场景中的各种因素和关系，确定合适的变量和约束条件，并用数学语言来准确地描述它们。同时，我们还需要计算模型所需的比特数量级。这个比特数量级可以用相关的参数来表示，它将反映模型的复杂度和规模。通过提出这个场景和建立相应的模型，我们可以展示 QUBO 模型在不同领域的应用潜力和创新可能性，为解决实际问题提供新的思路和方法。

三、模型假设

1.假设每个城市有足够数量的可供租赁的卡车，且卡车的租赁和运输过程中不会出现故障或延误。

2.假设题目所给的货物起始城市、目的地城市、货物数量、卡车运输时间和成本等数据真实可靠，且在运输过程中保持不变。

3.假设仅考虑如何实现最小化运营成本或总成本的最优方案，不考虑其他因素对结果的影响。

4.假设物流公司在运输过程中，货物不会出现损坏或丢失等情况，且运输时间严格按照给定的时间表进行。

5.假设在计算成本时，只考虑卡车租赁费用、运输成本和航空运输费用，不考虑其他额外费用。

四、符号说明

变量	解释说明
A	表示 12 吨载重卡车的型号
B	表示 5 吨载重卡车的型号
P	表示飞机的型号
wki	表示第 k 种运输工具在数量为 i 时的二进制值
tki	表示第 k 种运输工具的数量，即：tki
cA	12 吨载重卡车的租赁价格，5000 元/天
cB	5 吨载重卡车的租赁价格，3000 元/天
cP	飞机的租赁价格，10000 元/吨
dA	12 吨载重卡车从上海到西安的单趟成本
dB	5 吨载重卡车从上海到西安的单趟成本

dP	货物从上海到西安的航空运价，假设为 10000 元/吨
Y	运输物流中投入使用的不同载量运输工具型号 a，b 数量
x	决策变量，用于表示是否租赁运输工具，0 表示不租赁，1 表示租赁
y	决策变量，用于表示货物是否通过航空运输到城市，0 表示不通过航空运输，1 表示通过航空运输
z	决策变量，用于表示其他相关决策，具体含义根据问题而定
q	货物的数量
s	运输工具的货箱容量
y	运输工具的效率
r	运输工具的油耗
p	运输工具的维护成本
i	表示迭代次数或其他相关计数
α	系统参数，在特定公式中使用
β	麻雀算法中的相关参数
Q	QUBO 模型中的系数矩阵
λ	正标量惩罚项，在 QUBO 模型中用于调整目标函数
Γ	量子退火算法中的场强，促使自旋状态发生转变
M	重心计算公式中的中间变量，用于表示麻雀种群的平均位置
Ne	能量水平
Ns	可解的个数
Ni	量子位的数量

五、问题一模型的建立与求解

综合上述问题分析，我们得到思路流程图如图 5.1 所示：

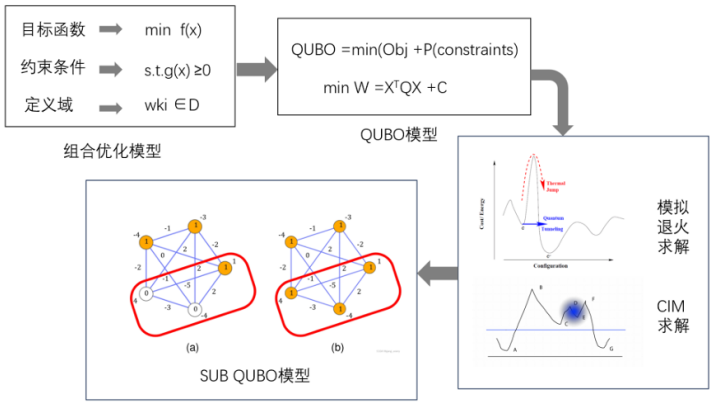


图 5.1 思路流程图

其中我们将 QUBO 模型看作一个灰盒，将题中表格的数据放入盒中针对具体问题进行求解。QUBO 模型求解具体流程图如图 5.1 所示：

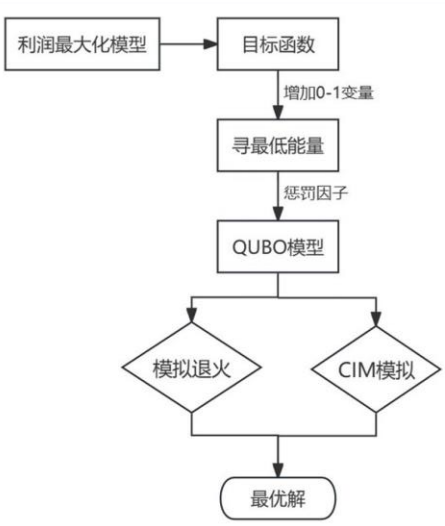


图 5.2QUBO 模型求解具体流程图

5.1 模型的建立

5.1.1QUBO 模型

QUBO 模型可以表述众多组合优化问题，本题中的最优租赁方案问题满足其要求。QUBO 无约束二次二进制优化模型作为量子计算中应用最为普遍的优化手段，它成功地整合了众多复杂的组合优化问题。当面临问题规模庞大、难以通过精确求解器找到“最优”解的情况时，该模型便能够派上用场。它采用启发式方法，在有限的时间约束下努力寻找尽可能接近最优的方案，为复杂问题的求解提供了一种高效且实用的途径。

QUBO 模型的最简易形式可表述为：

$$y_{min} = z^T P z \tag{5.1}$$

其中 z 作为二进制变量组成的向量，即当中每个变量的取值均为{0,1}，在 QUBO 模型中，为了使得约束条件得到更好的表示，我们引入二进制 0-1 变量。QUBO 模型是解决组合优化问题的数学形式，而在模型中，变量通常被限制为二进制（0 或 1），这是因为 QUBO 模型通常用于描述决策问题，其中每个变量代表一个决策变量，其取值为 0 或 1，分别表示不做某项决策或做某项决策。

QUBO 目标为找到使得 y 最小的 z。P 是常数的方阵，并且该常数方阵一般在最优化问题中，为对称矩阵或上/下三角形形式。

$$\begin{cases} q'_{ij} = (q_{ij} + q_{ji}), i < j \\ q'_{ij} = 0, \qquad\quad i > j \end{cases} \tag{5.2}$$

表 5.1 租赁价格

型号	12 吨载重卡车	5 吨载重卡车	飞机
租赁价格	5000	3000	10000

根据此表，按对应货物数量计算卡车租赁方案的最小成本。

假设w_{ki}为第 k 种卡车在数量为 i 时的二进制值，t_{ki}表示第 k 种卡车的数量，即：$t_{ki} = i$。因此，得到约束函数表达式：

$$\sum_{i=1}^{24} 100w_{1i}t_{1i} + 140w_{2i}t_{2i} + 200w_{3i}t_{3i} + 320w_{4i}t_{4i} = 2400 \tag{5.3}$$

将约束条件转化为：

$$\begin{gathered} minf(z) \\ s.t.Az = b \\ f'(z) = f(z) + \lambda(Az - b)^T(Az - b) \end{gathered} \tag{5.4}$$

其中 λ 为正标量惩罚项,为一个足够大的数。

随问题规模的扩大，传统计算方法无法有效地计算出结果，此时使用适配于相干伊辛机(CoherentIsingMachine,CIM)的 QUBO 模型，能够在量子计算机硬件上进行毫秒级加速，从而实现最优解结果的快速得出。

5.1.2QUBO 模型的建立

根据题意，我们知道约束条件包括对于每个物流公司租赁卡车 a、卡车 b 或飞机 p 的控制最低成本限制，以及最短路径的限制。是否租赁卡车 a、b，货物是否通过航空运输到城市，0、1 分别选与不选卡车或飞机，定义决策变量用于表示：

$$x_i, y_{i,} z_i = \begin{cases} 1 & \text{选}i\text{型卡车或飞机} \\ 0 & \text{不选}i\text{型卡车或飞机} \end{cases} \tag{5.5}$$

并结合选择卡车 a 或卡车 b 的数量及其对应的成本与运输时间折现值，可建立卡车租赁成本、航空运输成本和罚函数项的目标函数：

$$maxQ = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i q_i \tag{5.6}$$

将其转化为最小化目标函数$-Q$,即：

$$min(-Q) = -\sum_{i=1}^{4} x_i y_i q_i \tag{5.7}$$

约束条件由如下六点组成：

1.货物的起始地.目的地和数量是已知的且固定的，且货物必须从起点运送到终点。

2.每个城市可供租赁的卡车数量是足够的，但具体车型和数量需要根据成本和需求来选择。

3.卡车的运输时间和成本是给定的，需要在安排运输路线时考虑。

4.航空运输的运价是固定的，且当日到达，但需要权衡成本和时间因素。

5.各小组间可在任何一个城市拼货和中转运输，但需要合理安排以降低成本。

6.总成本需要在一定的预算范围内，或者需要尽可能地降低成本。

(1)运输工具的最大载重：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leqslant 5000 i_+ \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \leqslant 3000 i_+ \\ \sum_{i=1}^{n} c_i z_i \leqslant 10000 pi \end{cases} \tag{5.8}$$

(2)一次性运输货物时，卡车租赁总资金不能大于租赁飞机总资金的成本：

$$\sum_{i=1}^{n} n\, c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} n c_i y_i \leqslant 10000 npi \tag{5.9}$$

(3)卡车 a，卡车 b 与飞机 p 的数量必须为自然数：

$$x_i \in N \tag{5.10}$$

(4)由决策变量的定义可得:

$$y_i \in \{0,1\} \tag{5.11}$$

综上，约束条件为：

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} y_i \geqslant 3 \\ \sum_{i=1}^{4} c_i x_i \leqslant 2400 \\ x_i \in N \\ y_i \in \{0,1\} \end{cases} \tag{5.12}$$

为了将上述二次有约束二进制优化模型改写为二次无约束二进制优化模型（QUBO），需要对目标函数添加惩罚：

$$g_1 = \left\{\max\left|3 - \sum_{i=1}^{3} j_i, 0\right|\right\}^2, k_1 = \left\{\max\left|\sum_{i=1}^{3} c_i x_i - 2400, 0\right|\right\}^2 \tag{5.13}$$

故惩罚项为:

$$\lambda(g_1 + k_1) \tag{5.14}$$

其中λ为罚参数，一个足够大的数。

因此最终 QUBO 模型为：

$$minz = -\sum_{i=1}^{3} x_i y_i q_i + \lambda(g_1 + k_1) \tag{5.15}$$

5.1.3 罚函数灵敏度分析

具体步骤：

1.将该模型的无约束优化问题表示为：$minz(x_i, \lambda) = min(-Q) + \lambda(g_1 + k_1)$
2.选择罚参数λ,设置一个基准值λ_0
3.使用优化算法计算在该罚参数值λ_0下的目标函数值$min(-Q)$,得到最优解x_i^*及对应目标函数值$min(-Q)^*$。
4.改变其罚参数值,例如$\lambda_{\alpha 0} = \lambda_0 + \Delta\varepsilon$，$\varepsilon$是一个小的正数。
5.使用优化算法求解新的无约束优化问题：$\min z = \min(-Q) + \lambda_{\alpha 1}(g_1 + k_1)$,其中$\lambda_{\alpha 1}$为改变后的罚参数值，得到新的最优解$x_i'$和对应新的目标函数值$\min(-Q)'$。
6.计算灵敏度，灵敏度可以通过计算罚函数值的变化量与罚参数的变化量之比来衡量，即 $\frac{min(-Q)^* - min(-Q)'}{\lambda_0 - \lambda_{\alpha 1}}$
7.根据需要，需要进行多次改变罚参数的值，并计算相应的灵敏度，以全面了解罚函 数的特性。

这个灵敏度指标反映了罚函数对罚参数变化的敏感程度。例如，如果灵敏度值较大，说明罚函数对罚参数的变化较为敏感；如果灵敏度值较小，则说明罚函数对罚参数的变化不太敏感。

根据上述步骤求解得λ=600000 时，较为合适。

5.2 模型的求解

5.2.1 量子计算

量子退火算法是一类新的优化算法，它是模拟退火算法的一种延伸和改进。与经典模拟退火算法利用热力学中的热波动来搜索问题的最优解不同，量子退火算法利用量子隧穿效应即量子因为测不准原理而具有的穿透比其自身能量高的势垒的能力，从而使算法摆脱局部极值，以更高概率逼近全局最值[5]。如图 5.3 所示：

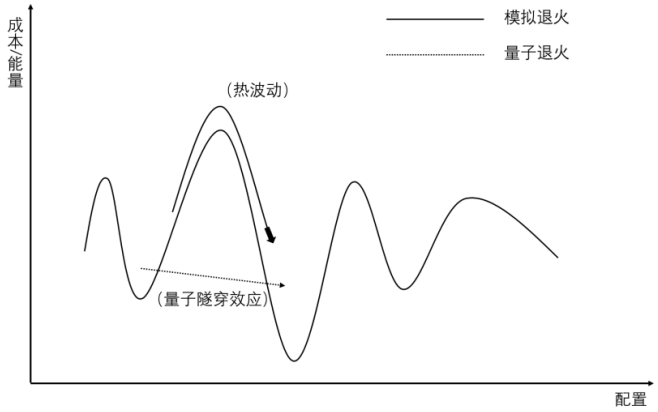


图 5.3 量子退火算法与模拟退火算法过程比较图

量子退火算法模型主要有两大核心要素。首先，是势能，它的主要作用在于实现量子优化问题与量子系统之间的映射关系。换言之，它将我们所追求的优化目标函数，转化为一个作用于量子系统的势场。其次，是动能，它通过引入一个可以调控的动能项，扮演了调节量子波动穿透场的角色。量子系统在这两个场的协同影响下的演化过程可以通过薛定谔方程（或狄拉克方程）来精确描述：

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle \tag{5.16}$$

因实际情况下难以直接求解，故采用有效随机过程方法如路径积分蒙特卡罗(PIMC):

$$E(t) = E_m(t) + E_n(t) \tag{5.17}$$

在量子退火算法中，量子哈密顿函数$E(t)$作为评价函数，精准评估量子系统状态。其中，$E_m(t)$表示势能，反映能量分布；$E_n(t)$代表动能，引入量子波动效应，通过逐步减小初始值，引导系统逼近全局最优解。

量子退火算法常用横向场随机伊辛模型作为测试基准。诸多组合优化问题首先需映射至伊辛模型，随后运用量子退火算法求解。该模型的哈密顿函数是算法关键：

$$E_p = \sum_{a=1}^{n} e_a\delta_a^x + \sum_{a,b=1}^{n} I_{ab}\delta_a^x\delta_b^x \tag{5.18}$$

其中，能量偏移角度以e_a表示，泡利自旋矩阵以δ_a^x表示，自旋量 a 和 b 之间的耦合度以I_{ab}表示。

依据伊辛模型的哈密顿函数, 从而获得量子退火的哈密顿函数为：

$$E(t) = E_p + \Gamma(t)\sum_{a=1}^{n}\Delta_a\delta_a^y \tag{5.19}$$

在量子退火算法中，场强Γ促使自旋状态发生转变，类似于模拟退火中温度 T 的作用。因此，任何采用上述形式表示的优化问题，均可借助量子退火算法得到解决。

5.2.2 算法设计与求解

QUBO 模型适配相干伊辛机并能转化为伊辛模型，因此设计量子计算算法，借助特定求解器如 Kaiwu SDK 进行求解，从而提高效率。

算法 1
Step1:根据最优租赁方案情境将其剖析为组合优化问题，构造函数。 Step2:初始化各个参数，其中计数参数 i=1，取量子退火的初始温度 T_0 足够大，Γ为横向场强，确定最大迭代次数为 MaxSteps,初始化解为 x,对应的状态能量为$E_m(t)$。 Step3:通过随机将一个决策变量由 0 变 1 或由 1 变 0 产生随机微扰，从而产生新状态x',其对应的状态能量为$E_m(x')$。 Step4:计算能量差$\Delta E_m = E_m(x') - E_m(t)$以及 $\Delta E_n = E_n(x') - E_n(t)$,如果$\Delta E_m < 0$或者$\Delta E_n < 0$,则系统接受新解,反之，计算$x'$的接受概率$exp(\Delta E_n/T)$,并产生$(0,1)$区间上均匀分布的随机数 $rangdom(0,1)$。若$exp(\Delta E_n/T) < rangdom(0,1)$,则$x = x'$。否则,重复执行步骤 3。 Step5:进行退温操作,Γ的变化和模拟退火中的温度 T 作用类似,横向场强变化形式为$\Gamma = \Gamma - (\Gamma_0/MaxSteps)$。 Step6:判断是否满足终止条件Γ=0,如果满足,量子退火算法终止,否则,将重复步骤 3。

基于上述算法，使用 KaiwuSDK 内置的模拟退火求解器和 CIM 模拟器进行求解得，当租赁 1 辆卡车 a，2 辆卡车 b 时的总成本最小，为 58000 万元。

5.2.3 问题一的求解与最优方案

根据已知条件，可计算得出两种型号卡车的性价比大小关系为 a>b。

利用贪心算法求解进行检验。

首先，需先上文求解所得的结果相同，故结果合理，因此当租赁 1 辆卡车 a，2 辆卡车 b 时的总成本最小，为 58000 万元。

5.3 最优方案

5.3.1 货车租赁方案

表 6.8 问题一利用随机抽样的结果检测表

对比方法	货车租赁方案	最小总成本
量子退火算法	2 辆卡车 a 1 辆卡车 b	53600
随机抽样	2 辆卡车 a 1 辆卡车 b	78200

5.3.2 货物运输方案

表 6.9 问题一利用贪心算法求出最佳方案表

对比方法	货车租赁方案	最小总成本
量子退火算法	2 辆卡车 a 1 辆卡车 b	53600
随机抽样	2 辆卡车 a 1 辆卡车 b	78200

六、问题二模型的建立与求解

6.1 模型的建立

6.1.1QUBO 模型的建立

问题二是在问题一的场景中，改变了组合租赁运输工具的各参数，可租赁卡车 a，b 以及飞机 p 的各参数，以及两者之间的匹配关系和启动成本资金，而其问题本质与解题思路未发生改变，故问题二可在问题一已建立的模型基础上，修改改变后相对应的参数，进而建立模型。

运输成本的计算会受到货物重量和体积、运输距离、卡车类型和租金、卡车单趟成本、运输方式选择、油价波动、道路状况、运输时间、拼货和中转、市场供需关系、政策法规等多个因素的影响。题意中运输物流中投入使用的不同载量卡车型号 a，b 数量 Y 为：

$$Y = \sum_{k=1}^{a} \sum_{i=1}^{b} w_{ki} t_{ki} (z_k \cdot d_k) w_{ki} t_1 P \tag{6.1}$$

物流运输的总工作量，可根据卡车的一天的 24 小时运输时间 、卡车货箱容量、效率以及数量用数学表达式表示卡车的成本即：

$$C_1 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{24} w_{ki}\, t_{ki} (s_k w_{ki} + y_k w_{ki} t_1 + r_k w_{ki} t_2 + p_k w_{ki} t_2) \tag{6.2}$$

转化为最小化目标函数，即：

$$C_2 = 7 \sum_{j=1}^{2} \left(y_j' t_1 + r_j' t_2 + p_j' t_2 \right) + 3 (y_3' t_1 + r_3' t_2 + p_3' t_2) \tag{6.3}$$

约束条件由如下三点组成：车辆载重约束确保每次运输不超过车辆的载重限制；时间窗口约束，考虑货物在运输所用的送达时间；供需平衡约束，确保每个城市的发货和收货量平衡。

6.1.2 罚函数灵敏度分析

具体步骤同问题一，改变了其目标函数与变量：这个灵敏度指标反映了罚函数对罚参数变化的敏感程度。例如，如果灵敏度值较大，说明罚函数对罚参数的变化较为敏感；如果灵敏度值较小，则说明罚函数对罚参数的变化不太敏感。

1.将该模型的无约束优化问题表示为：$minz(x_i, \lambda) = min(-Q) + \lambda(g_1 + k_1)$

2.选择罚参数λ,设置一个基准值λ_0

3.使用优化算法计算在该罚参数值λ_0下的目标函数值$min(-Q)$,得到最优解x_i^*及对应目标函数值$min(-Q)^*$。

4.改变其罚参数值,例如$\lambda_{\alpha 0} = \lambda_0 + \Delta\varepsilon$，$\varepsilon$是一个小的正数。

5.使用优化算法求解新的无约束优化问题：$\min z = \min(-Q) + \lambda_{\alpha 1}(g_1 + k_1)$,其中$\lambda_{\alpha 1}$为改变后的罚参数值，得到新的最优解$x_i'$和对应新的目标函数值$\min(-Q)'$。

6.计算灵敏度，灵敏度可以通过计算罚函数值的变化量与罚参数的变化量之比来衡量，即 $\frac{min(-Q)^* - min(-Q)'}{\lambda_0 - \lambda_{\alpha 1}}$

7.根据需要，需要进行多次改变罚参数的值，并计算相应的灵敏度，以全面了解罚函 数的特性。

由上述步骤求解得：λ=600000 时，较为合适。

6.1.3 物流转运中心选址

利用数学规划方法基于数学规划的物流中心选址方法能够系统地处理大量的数据和复杂的约束条件，要综合考虑成本、服务水平、地理位置等多重因素，通过线性规划、非线性规划、整数规划等，针对不同的选址问题设定适当的目标函数和约束条件，从而找到最优或接近最优的选址方案。

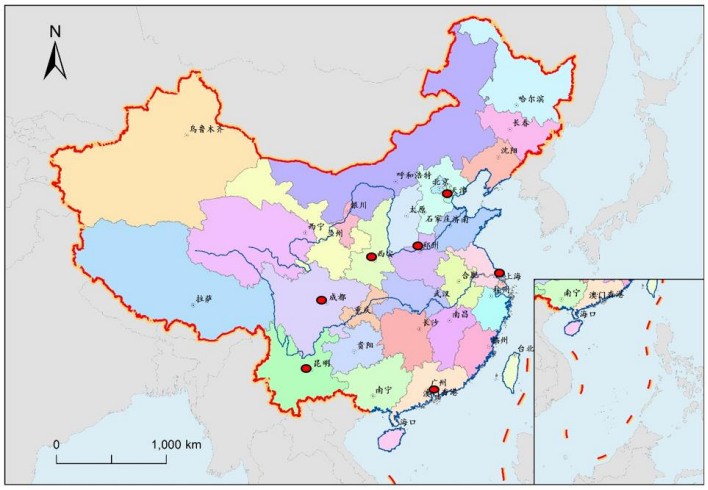


图 6.1 物流配送选址点图

结合 GIS 提供精准地理数据，MCDM 平衡多元目标，数学规划方法显著增强物流选址决策的科学性与可靠性，助力企业精准布局，应对复杂市场环境，实现资源最优配置与成本有效控制。

表 6.2 公司一待运货物小组 1

货物类型	起点城市	终点城市	卡车 a	卡车 b	运输时间（天）	成本	飞机
普货（19 吨）	上海	天津	1	1	3	28500	0
普货（25 吨）	西安	昆明	2	1	4	53000	0
普货（7 吨）	郑州	深圳	2	0	4	28000	0

在此问题中，两物流公司计划在成都、上海、天津物流起点到终点西安、昆明、深圳在运输区域内建立一个新的物流转运中心，根据这些数据如图 6.2 所示，基于重心法数学模型，可找到一个地理位置，以最小化从始发物流中心到目的城市的总运输成本和时间。

表 6.3 公司一待运货物小组 2

货物类型	起点城市	终点城市	卡车 a	卡车 b	运输时间（天）	成本	飞机
普货（27 吨）	上海	天津	2	1	3	38000	0
普货（10 吨）	成都	昆明	2	0	4	32000	0
普货（19 吨）	上海	深圳	1	2	4	44500	0

现有两公司的配送节点信息，6 个配送节点的 x、y 坐标，需求量和运输费用，如表 6.4 所示。

表 6.4 原始坐标结果

节点	wX9i	wY9i	wZ9i
天津	300	800	100
昆明	1130	300	150
上海	375	937.5	187.5
西安	450	275	72
郑州	900	900	112.5
合计	3155	3212.5	622
x1=	5.16	y1=	5.18

6.1.4 改进麻雀优化算法

1.麻雀算法基本原理

麻雀搜索算法(SparrowSearchAlgorithm，SSA)是由薛建凯提出的一种新型群智能优化算法，主要模拟了麻雀群体觅食和反捕食行为[6]。

每代发现者的位置更新公式如下：

$$x_{i,d}^{t+1}=\begin{cases}x_{i,d}^{t}\times exp\left\{\dfrac{-i}{\alpha\times iter_{max}}\right\}, if R_2<ST\\ x_{i,d}^{t}+Q\times L, if R_2\gg ST\end{cases}\tag{6.4}$$

每代跟随者的位置更新公式如下:

$$x_{i,d}^{t+1}=\begin{cases}Q\times \exp\{\dfrac{xw_d^t-x_{i,d}^t}{t^2}\}, if i>\dfrac{N}{2}\\ xb_d^t+\dfrac{1}{D}\sum_{d=1}^{D}(|x_{i,d}^t-xb_d^t|\times rand\{-1,1\}), else\end{cases}\tag{6.5}$$

侦查者位置更新公式如下:

$$x_{i,d}^{t+1}=\begin{cases}xb_d^t+\beta\times|x_{i,d}^t-xb_d^t|, if f_i\neq f_g\\ x_{i,d}^t+K\times\{\dfrac{|x_{i,d}^t-xw_d^t|}{|f_i-f_w|+\varepsilon}\}, if f_i=f_g\end{cases}\tag{6.6}$$

2.PSO 算法算最短路径

粒子群优化算法(Particle Swarm Optimization，PSO 主要通过更新粒子的速度和位置信息寻找最优解。粒子群优化算法的应用较为广泛，且收敛速度快，调整参数也较少[7]。考虑有 N 个粒子在 D 维空间搜索，初始粒子群算法更新表示为:

$$\begin{cases}v_{ij}^{d+1}=\omega v_{ij}^{d}+c_1r_1\left(p_{ij}^{d}-x_{ij}^{d}\right)+c_2r_2\left(p_{gj}^{d}-x_{ij}^{d}\right)\\ v_{ij}^{d+1}=v_{ij}^{d}+v_{ij}^{d+1}\end{cases}\tag{6.7}$$

其中，d 为迭代次数，v_{ij} 表示第 i 个粒子在 i 维的速度，x_{ij} 表示第 i 个粒子在 j 维的位置。ω 表示惯性权重，控制粒子速度的惯性。c_1 与 c_2 是学习因子，控制粒子个体和群体经验对速度的影响。r_1 与 r_2 是范围在［0，1］之间的随机数。

3.麻雀算法改进

①Cubic 混沌映射初始化麻雀种群。在优化领域，混沌映射可以用于替代伪随机数生成器，生成 0 到 1 之间的混沌数。Cubic 混沌映射具有良好的混沌特性，能够在整个搜索空间内生成分布广泛的初始解，从而提高算法的全局搜索能力。

Cubic 表达式如下:

$$x_{n+1}=\alpha x_n(1-x_n^2)\tag{6.8}$$

其中，x_n 是当前迭代的混沌变量值，初值为(0，1)，α 是系统参数，它决定了映射的混沌行为，取 x_n=0.2，α =0.2493。

②重心反向学习。反向学习是一种经典的智能优化算法加速技术，它在当前点和它的反向点之中择优选择。

重心计算公式如下:

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{6.9}$$

重心反向解的计算公式:

$$x_{i,new} = 2 \times k \times M - x_i \tag{6.10}$$

在迭代过程中，算法会对麻雀种群的更新位置进行重心反向变异。由于不能保证每次变异都能得到更优的位置，因此采用贪心策略来决定是否更新位置:仅当变异后的新位置更优时，才用其替换原有位置，否则保留原位置。其中，k 是［0，1］范围内均匀分布的随机数，加入收缩因子可以拓展反向搜索空间的范围，增大找到更优解的概率。

4.混合算法求解过程

混合麻雀算法和粒子群算法的核心思想在于，将粒子群算法的位置信息作为改进后麻雀算法的相关参数，从而运行麻雀算法，最终进行模型求解，如图所示。

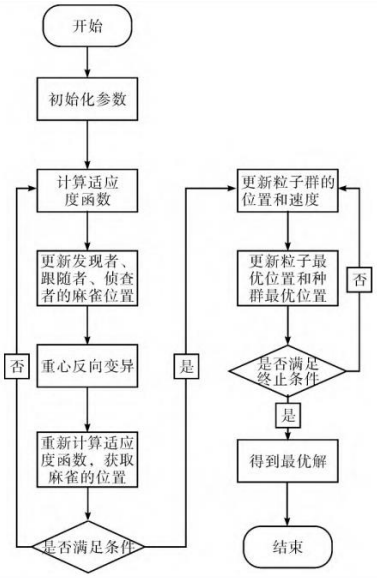


图 6.2 算法求解过程

混合算法的运行步骤如下:

混合算法
步骤 1 初始化:设定麻雀和粒子群的种群数量、迭代次数等参数。利用公式(6.8)初始化麻雀种群位置，增加搜索范围的多样性。
步骤 2 适应度评估与排序:根据适应度函数对麻雀进行排序，识别并记录每个麻雀的个体最优和全局最优适应度值及对应位置。
步骤 3 位置更新:使用公式(6.4)、公式(6.5)、公式(6.6)更新发现者、跟随者、侦察者的位置。
步骤 4 重心反向变异:对处于最优位置的麻雀使用公式(6.10)实施重心反向变异，增强全局搜索能力。
步骤 5 适应度再评估:重新计算适应度值，更新麻雀的个体和全局最优位置。
步骤 6 位置优化判断:比较麻雀的当前最优位置与粒子群的最优位置。如果麻雀位置更优，进入粒子群优化阶段;否则，回到步骤 2 继续迭代。
步骤 7 粒子群位置与速度更新:使用公式(6.7)更新各粒子群的位置和速度。
步骤 8 粒子群最优位置更新:更新粒子群个体最优和全局最优位置。
步骤 9 迭代终止判断:如果迭代次数达到预设的最大值，则结束，输出全局最佳位置;这一位置作为麻雀算法的重要参数，用于求解目标函数。如果未达到最大迭代次数，回到步骤 6 继续迭代。

为了验证所提算法的优越性，本算法选取公司 1 的物流配送和 10 个主要地级市物流中心为例进行路径规划。配送中心和地级市物流中心的位置分布如图 6.3 所示。

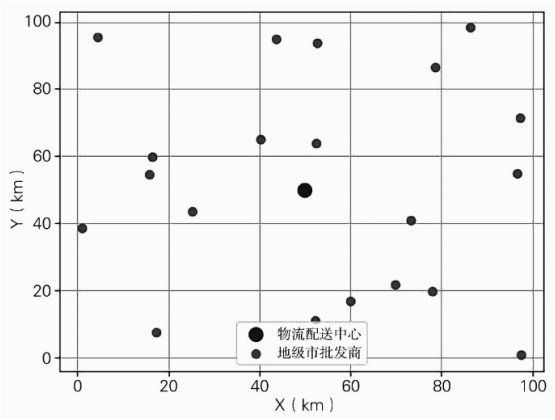


图 6.3 物流配送中心和地级市批发商分布图

6.2 模型的求解

6.2.1subQUBO 模型的求解

SubQUBO 方法的核心思想是将大规模的组合优化问题分解为一系列较小规模的问题，以便利用现有的计算资源，如伊辛机，进行有效求解，并通过理论支持，确保分解后的小问题在求解后能够还原到原始大规模问题的解[8]。

实现逻辑：化整为零，反向求解

1.在解决大规模组合优化问题时，QUBO 建模的解往往由多个量子比特集合构成。

2.若我们构建一个较小规模的问题，专注于最终解中所有不正确的量子比特集合，并利用伊辛机进行求解，那么这些错误的量子比特集合将被修正为正确的集合，从而得出正确的解。

实现方法：设计问题，聚焦于错误的量子比特集合，并通过伊辛机多次求解。

1.使用经典计算器生成多个候选答案，比较它们的量子比特集合值。一致的集合视为正确，不一致的视为错误。

2.提取错误集合，利用伊辛机求解，最终得到整体的正确答案。

6.2.2 罚函数灵敏度分析

本题根据两个决策变量形成的 QUBO 模型，已知考虑的约束条件过多，因此设计量子退火算法以降低计算量。

算法 3
Step1:根据最优租赁方案情境将其剖析为组合优化问题，构造函数。 Step2:初始化各个参数，其中计数参数 i=1，取量子退火的初始温度 T_0 足够大，Γ 为横向场强，确定最大迭代次数为 MaxSteps,初始化解为 x,对应的状态能量为$E_m(t)$。 Step3:通过随机将一个决策变量由 0 变 1 或由 1 变 0 产生随机微扰，从而产生新状态x',其对应的状态能量为$E_m(x')$。 Step4:计算能量差$\Delta E_m = E_m(x') - E_m(t)$以及 $\Delta E_n = E_n(x') - E_n(t)$,如果$\Delta E_m < 0$或者$\Delta E_n < 0$,则系统接受新解,反之，计算$x'$的接受概率$exp(\Delta E_n/T)$,并产生$(0,1)$区间上均匀分布的随机数$rangdom(0,1)$。若$exp(\Delta E_n/T) < rangdom(0,1)$,则$x = x'$。否则,重复执行步骤 3。 Step5:进行退温操作,Γ 的变化和模拟退火中的温度 T 作用类似,横向场强变化形式为$\Gamma = \Gamma - (\Gamma_0/MaxSteps)$。 Step6:判断是否满足终止条件 Γ =0,如果满足,量子退火算法终止,否则,将重复步骤 3 对下一个小问题重复 Step2-Step5。否则，重复 Step3。当所有小问题算法终止，整个量子退火算法终止。

使用 Kaiwu SDK 求解得：小组一的货物有从上海到西安的 19 吨普货，成本 24500 元；从成都到昆明的 25 吨普货，成本 37000 元；从上海到深圳的 7 吨普货，成本 14000

元。小组二的货物有从上海到西安的 27 吨普货，成本 38000 元；从成都到昆明的 10 吨普货，成本 16000 元；从上海到深圳的 19 吨普货，成本 30500 元。

6.2.3 物流转运中心选取

物流配送路径优化问题，提出一种改进的麻雀搜索算法，通过引入 Cubic 混沌映射和粒子群优化技术，有效地提高了算法的全局搜索能力，同时有效避免了早熟收敛的问题。

表 6.5 初始化迭代的运输距离和总运输成本

节点	坐标 x	坐标 y	w 需求量/吨	q 运输成本/(元/吨.)	K	d 运输距离	TC 运输成本
昆明	118.77	32.04	46	2510.869565	10	2552	115500
上海	111.67	40.82	35	2928.571429	10	1474	102500
西安	117.19	39.13	44	2443.181818	10	915	107500
天津	102.71	25.04	27	3222.222222	10	2087	87000
郑州	108.95	34.26	30	3250	10	889	97500
				总运输成本			510000

由于第一次迭代结果的总运输成本小于初始运输成本，因此需要进行多次迭代，直至总运输成本高于上一次总运输成本，即可得出最优物流中心坐标。多次迭代结果数据如表 6.6 所示。

表 6.6 迭代最终结果的物流中心坐标

节点	wX9i	wy9i	w9;
郑州	300	700	100
西安	1130	346	146
上海	375	937.5	187.5
昆明	450	275	72
天津	895.5	600	112.5
合计	3150.5	2858.5	618
x1=	5.61	y1=	5.12

在实验中，将上述参数和数据输入模型，并通过 Python 实现了相关算法，模型得出的车辆配送路径结果如图 6.4 所示

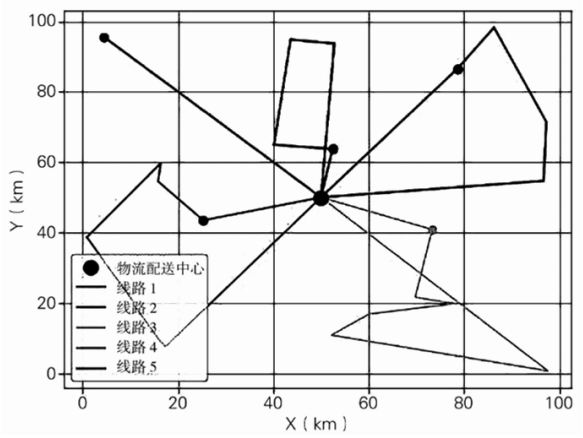


图 6.4 车辆配送路径图

在坐标轴上（5.61,5.12）这一点恰好位于西安与郑州之间的中心地带，使其成为设立转运中心的绝佳位置。此点不仅便于货物从六个主要城市快速集散，还能通过高效的物流网络辐射全国。选择此处作为转运中心，能显著提升物流效率，降低运输成本。我们建议在该区域构建一座集现代化设施与智能管理于一体的转运枢纽，以实现物流

资源的优化配置和快速响应市场需求[9]。

6.2.4 最优化成本

成本最优化策略重点关注降低整体运营成本，以确保高效的物流服务。基于数学规划方法，可以评估不同地点的成本效益比，包括地块价格、运输成本（如距离主要公路、铁路线的远近），以及地理位置所覆盖的服务范围等。对物流中心的选择可以在运输成本和地理位置之间找到一个平衡点。

另外，成本最优化策略还涉及物流中心的设计和运营，可以通过优化货物入库、存储、拣选和出库等仓库内部流程，提高运营效率，减少时间和成本，同时也可以通过采用高效的货物追踪系统等现代化的物流设施来节约运营成本。可见，基于数据和模型的方法能够为物流中心的选址和运营提供更精准的指导，使物流中心在保持竞争力的同时，实现成本最小化。

采用随机抽样方法，在满足约束条件，并采用最优匹配关系时的租赁方案中随机抽取部分方案，将其总成本与量子退火算法求得的总成本进行比较，结果如下表：

表 6.9 问题二利用随机抽样的结果检测表

对比方法	货车租赁方案	最小总成本
量子退火算法	1 辆卡车 a 2 辆卡车 b	53642
随机抽样	2 辆卡车 a 1 辆卡车 b	71542

表 6.10 改进麻雀算法及其他算法物流路径优化结果

名称	改进麻雀算法	SSA-PSO	SSA	PSO
总运输距离(km)	2070.8	1481.7	582.6	523.1
总费用(元)	28500	11800	7550	5850
使用车辆数(辆)	5	5	4	2
运行时间(s)	23.26	21.32	19.57	13.13

6.3 复杂组合成本最优化方案

6.3.1 货车租赁方案

在利用 subQUBO 方法和模拟退火算法解决复杂组合下的卡车租赁问题时，我们根据附件 4 中的详细指导和编程环境进行了相应的设置与调试。具体而言，我们设定了初始温度为 100 度，衰减常数为 0.95，并设定了迭代 25 次作为停止准则。通过这一系列的参数配置，我们成功运行了模拟退火算法，并得出了 subQUBO 模拟退火的结果图。

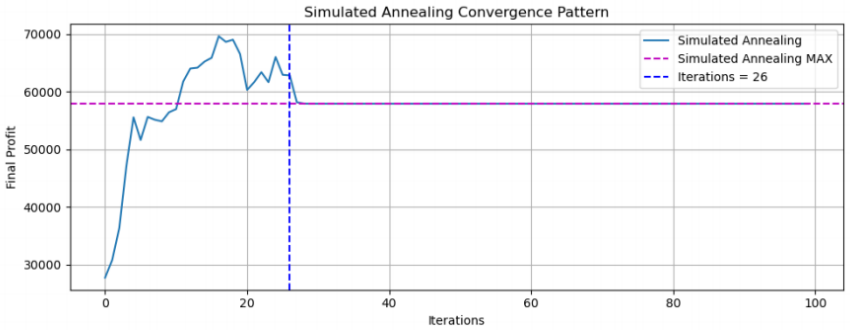


图 6.5 模拟退火求解结果

在结果图中，我们可以清晰地观察到随着迭代次数的增加，成本逐渐降低并趋于稳定，最终达到了模拟退火算法下的最小成本点。这一结果为我们提供了在复杂组合条件下卡车租赁方案的重要参考。

表 6.11 问题二租赁卡车数量及其货物重量的匹配关系表

起点-终点	货物类型	货物重量（吨）	成本（元）
上海-西安	普货	19	24,500
成都-昆明	普货	25	37,000
上海-深圳	普货	7	14,000
上海-西安	普货	27	38,000
成都-昆明	普货	10	16,000
上海-深圳	普货	19	30,500

基于模拟退火算法的输出，我们可以得出以下结论：在给定的问题背景下，通过合理安排不同租赁期限的卡车，两个物流公司合作运输最小成本的货车租赁方案如表 6.11 所示。

表 6.11 两公司合作运输最小成本的货车租赁表

货物地点	货物重量（吨）	卡车组合	A 型趟数	B 型趟数	总成本（元）
西安	44	A+B	3	1	78,000
		仅 A	4	0	94,000
昆明	46	A+B	3	2	97,500
		仅 A	4	0	100,000
上海	33	A+B	2	1	42,500
		仅 A	3	0	54,000

6.3.2 货物运输方案

本表格汇总了不同货物地点、两公司合作后货物总重量及卡车不同类型下的运输成本。详细列出了每趟运输的固定成本与租赁成本，进而计算出总运输成本与总租赁成本。结合所需趟数与预计总时间，最终得出总成本，如表 6.12 所示。此表格为物流规划与成本控制提供了直观的数据支持，帮助决策者快速比较不同运输方案的经济性，选择最优方案以节省成本。

表 6.12 最佳货物运输方案

货物地点	两公司总货物重量（吨）	卡车类型	所需趟数	每趟运输成本（元）	总运输成本（元）	每趟租赁成本（元）	总成本（元）
西安	44	A (12 吨)	4	18,500	74,000	5,000	94,000
		B (5 吨)	9	16,000	144,000	3,000	160,200
昆明	46	A (12 吨)	4	20,000	80,000	5,000	101,600
		B (5 吨)	10	17,000	170,000	3,000	200,000
上海	33	A (12 吨)	3	13,000	39,000	5,000	50,700
		B (5 吨)	7	11,000	77,000	3,000	108,700

七、问题三模型的建立与求解

7.1 人工智能模型超参数调优的 QUBO 模型

7.1.1 人工智能超参调优应用

QUBO 模型通常用于解决组合优化问题，其中变量是二进制(取值为 0 或 1)，并且目标函数是二次型的形式。它适用于那些需要在给定的约束条件下寻找最优解的问题，特别是当问题可以转化为进制变量和二次型目标函数的形式时。这种模型在多个领域都有应用，包括但不限于：

1.电路设计：QUBO 模型可以用于优化逻辑门的布局，以最大程度减少电路中的延迟或功耗。

2.物流和运输：用于优化货物的配送路线，以最小化成本或最大化效率。

3.金融投资：用于优化投资组合，以最大化收益或最小化风险。

4.组合优化：解决如旅行商问题(TSP)和背包问题等的组合优化问题。

5.人工智能和量子计算：QUBO 模型与量子计算和量子优化密切相关，可用于解决在传统计算机上难以解决的问题。

在问题 3 中，我们需要举例一个潜在通过构建 QUBO 模型从而进行决策优化的应用场景，综上并进行团队探讨，我们选取“人工智能模型超参数调优”这一场景进行探究。

7.1.2 背景信息

随着人工智能向分布式、多专家协同系统发展，机器学习模型的超参数调优变得尤为关键且复杂。传统调优方法如贪心算法、网格搜索，面对高维、大规模数据集时效率低下。

量子计算以其独特的并行处理能力和对特定问题的高效解决能力，为超参数调优带来了革命性机遇。尽管量子技术尚处初期，但其潜力巨大，能显著加速复杂模型超参数的搜索过程，提升模型性能调优的效率与精确度。探索量子计算在人工智能超参数优化中的应用，不仅是科研的前沿课题，更是推动 AI 技术跃升的重要方向。

7.1.3 研究方法

我们希望通过量子计算的优势，加速人工智能模型的超参数调优过程。具体而言，我们将超参数作为决策变量，以模型的性能度量（例如准确度）作为目标函数。QUBO 模型构建：我们将每个超参数引入二进制变量，构建一个 QUBO 模型。

基于超参数之间的相互关系，目标函数旨在最大化或最小化性能度量。CoherentIsingMachines(CIM)的应用：利用 CIM 的并行计算和高度连接性，在量子计算中更有效地搜索超参数空间。CIM 的量子优势可以提高搜索效率，找到更优的超参数组合。

7.1.4 思路及技术路线

选择关键超参数，我们需要仔细选择对模型性能影响较大的关键超参数。这可能包括学习率、层数、节点数等，具体取决于所使用的机器学习模型和任务。

7.1.5QUBO 模型设计

1、决策变量的引入：对于每个选择的超参数，引入一个二进制变量表示其取值。

2、目标函数的设计：设计目标函数，以模型的性能度量为目标，最大化或最小化这一性能度量，形成形式为二次型目标函数的。然后探究函数的约束条件，引入惩罚因子，使目标函数不受约束条件影响，形成二元无约束二值函数。

模拟退火求解或 CIM 模拟求解：使用模拟退火算法或者 CIM 求解构建好的 QUBO 模型。其中，它们充分利用了量子计算的优势，能够在高维、复杂的问题中进行高效的求解。使用获得的最优超参数组合训练机器学习模型，并在验证集或测试集上评估其性能。比较使用量子计算方法和传统方法得到的超参数组合的性能。

通过这一技术路线，我们期望在人工智能模型的超参数调优中充分发挥量子计算的优势，提高优化过程的效率，以更好地支持人工智能领域的研究和应用。因此，根据人工智能超参数调优的 QUBO 模型绘制出技术路线图，如图 7.1 所示。

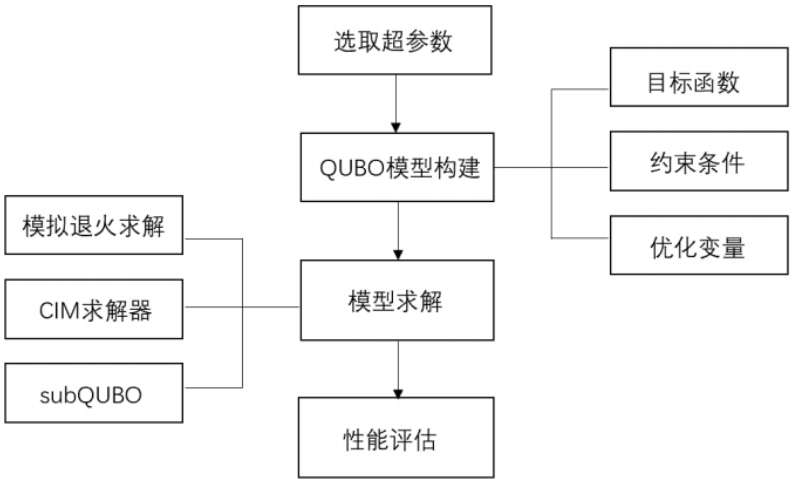


图 7.1 技术路线

7.2 研究结果

通过将量子计算引入人工智能模型的超参数调优过程，我们期望实现以下目标：

1.更快的优化速度：量子优化算法具有并行性和高效性，可以加速超参数搜索的过程，从而减少了调优所需的时间。

2.更准确的超参数调整：量子优化算法可能能够更精确地找到超参数的最优解，从而提高了模型的性能和泛化能力。

3.解决高维空间问题：传统的优化算法在处理高维超参数空间时可能受限，而量子优化算法可能更适合于处理高维空间的优化问题，这对于复杂的人工智能模型特别有用。

4.克服局部最优解问题：量子优化算法通常具有更好的全局搜索能力，可以帮助模型避免陷入传统算法局部最优解的情况，从而提高了模型的性能和稳定性。

5.应用于多种人工智能模型：量子优化算法不仅适用于特定类型的模型，还可以应用于各种类型的人工智能模型，包括监督学习、无监督学习、强化学习等。

7.2.1QUBO 模型算法

QUBO 模型算法步骤
Step1:根据待优化问题，构造量子系统的评价函数$H_q = H_{pot} + H_{kin}$,即量子哈密顿函数。其中，$H_{pot}(t)$为势能，即模拟退火算法中的评价函数，$H_{kin}^{(t)}$为动能；
Step2:初始化各个参数，T_0为量子退火的初始温度，Γ为横向场强，变化的横向场强引起不同量子状态之间的量子跃迁，最大迭代次数为 MaxSteps，初始化状态为x,对应的状态能量为$H_{pot}(x)$;
Step3:随机微扰产生新状态x',对应的状态能量为$H_{pot(x')}$;
Step4:计算能量差$\Delta H_{pot} = H_{pot}(x') - H_{pot}(x)$以及$\Delta H_q = H_s(x') - H_q^{(x)}$,如果$\Delta H_{pot} < 0$或者$\Delta H_q < 0$则系统接受新解$x = x'$,反之如果$\exp(\Delta H_q/T) < rangdom(0,1)$,则$x = x'$,否则重复执行步骤 3;
Step5:进行退温操作，Γ的变化和模拟退火中的温度T作用类似，横向场强变化形式为$\Gamma = \Gamma - (\Gamma_0/MaxSteps)$;
Step6:判断是否满足终止条件$F = 0$,如果满足量子退火算法终止，否则重复步骤 3。

7.2.2 超参数调优 QUBO 模型

通过数据的获得，我们采用量子计算的方法对人工智能超参数进行初步探究。假设 Ni：量子位的数量；Ne：能量水平；Ns：可解的个数，我们求解得到了 QUBO 求解

算法在不同参数配置下的准确度分布情况，例如：Ni=20，Ne=5 和 Ns=10。

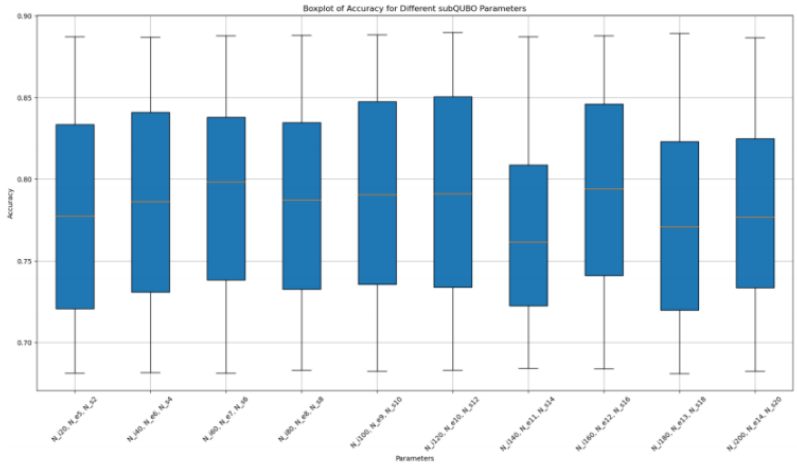


图 7.2QUBO 准确度分布箱线图

上图为箱形图，展示了 QUBO 求解算法在不同参数配置下的准确度分布情况。其中，每个箱子代表一组特定参数下算法准确度的统计分布。箱形图通过展示数据的五数概括（最小值、第一四分位数、中位数、第三四分位数、最大值）以及可能的异常值来展示数据的分散情况。

我们发现，准确率的中位数在不同参数设置之间有所变动，但总体来说几乎都在 0.80 以上，准确率较高。四分位距代表准确率的可变性，较短的箱子表示更一致的结果，较长的箱子表示结果的变化较大。结果显示 Ni_{60},Ne_{7},Ns_{6}，有些参数设置的箱子较长，表明在这些设置下准确率的变动较大，而一些较短的箱子则表明在这些设置下准确率较为稳定。

七、模型的评价与推广

7.1 模型的优点

本文通过模拟退火算法为 QUBO 问题得到了满意的解，较好地解决了寻找最优解的问题。且该算法还可用于其它各种组合优化问题，如 TSP 和 Knapsack 问题等，能产生令人满意的近似最优解，而且运行速度较快。

该模型通过两种求解方法分别是模拟退火求解器和 CIM 模拟器进行求解，其结果更合理、更准确；当量子比特的数量较多时，采用改进的模拟退火 subQUBO 进行求解，能很好地解决大规模数据或运算较复杂的问题。

本文对求解结果进行可视化处理及误差可视化处理，使呈现更为直观，且增强了可信度。

本文通过 QUBO 转化，将决策变量转化为 0-1 变量，使得数据得到充分使用，避免了数据错误或遗漏带来的误差。

7.2 模型的缺点

该模型建立在卡车租赁成本确定的前提条件下，本文采用的模拟退火算法求解 QUBO 问题时更适用于数据量足够大的样本，如果数据量较小，求解结果会存在一定的误差。

7.3 模型的推广

该论文使用的 QUBO 模型，除了可解决物流租赁和运输方案外的问题，还可以解决金融、人工智能、最大独立集问题、不对称分配问题、对称分配问题、边约束分配问题、二次背包问题、最大团问题、最大割问题、整数划分问题和旅行商问题等，可结合具体实际运用进行变化运用。并在使用过程中，可以通过下述方式将 QUBO 模型与 Ising 模型相互转化，以便求解不同问题。

参考文献

[1] Wang Xiaojun, Wang Zhenghuan, Ni Bowen. Mapping structural topology optimizat ion problems to quantum annealing [J]. Structural and Multidisciplinary Optimizatio n, 2024, 67 (5):

[2] 王敬,张萌,李芳,张海懿.量子计算关键技术及应用发展分析[J].信息通信技术与政策,2023,49(07):9-16.

[3] Şeker Oylum, Tanoumand Neda, Bodur Merve. Digital Annealer for quadratic uncon strained binary optimization: A comparative performance analysis [J]. Applied Soft C omputing Journal, 2022, 127

[4] Yue Ji. Logistics distribution scheduling algorithm based on artificial intelligence [J]. Measurement: Sensors, 2024, 34

[5] 王宝楠,水恒华,王苏敏,胡风,王潮.量子退火理论及其应用综述[J].中国科学:物理学力学天文学,2021,51(08):5-17.

[6] 孙玉杰,张占强,孟克其劳,吕晓圆.基于 ESMD 和 SSA-PNN 的电能质量扰动信号识别分类[J].现代电子技术,2022,45(14):108-114.

[7] 曹梦龙,赵文彬,陈志强.融合粒子群算法与改进灰狼算法的机器人路径规划[J].系统仿真学报,2023,35(08):1768-1775.

[8] Luca Asproni, Davide Caputo, Blanca Silva, Giovanni Fazzi, Marco Magagnini. Acc uracy and minor embedding in subqubo decomposition with fully connected large pr oblems: a case study about the number partitioning problem [J]. Quantum Machine I ntelligence, 2020, 2 (1):

[9] 吴善兵.六西格玛方法在 QG 公司厂内物流管理改善中的应用研究[D].导师:关志民.东北大学,2015.